



Pauta Control recuperativo

P1. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función y definimos la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto $\mathbb{N}$ como

$$n\mathcal{R}m \iff f(n) \leq f(m),$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$. Demuestre que

a) (3 puntos) Si f es inyectiva, entonces $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

Solución

Sea f una función inyectiva. Mostremos que

- $\mathcal{R}$ es una simétrica: Como $f(n) \leq f(n)$ se tiene que $n\mathcal{R}n$ [0.5 puntos].
- $\mathcal{R}$ es antisimétrica: Sea $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n\mathcal{R}m$ y $m\mathcal{R}n$. Tenemos que $f(n) \leq f(m)$ y $f(m) \leq f(n)$, por lo tanto $f(n) = f(m)$ [1 pto]. Como f es inyectiva concluimos que $n = m$ [0.5 puntos].
- $\mathcal{R}$ es transitiva: Sea $n, m, l \in \mathbb{N}$ tal que $n\mathcal{R}m$ y $m\mathcal{R}l$. Se tiene que $f(n) \leq f(m)$ y $f(m) \leq f(l)$, por lo tanto $f(n) \leq f(l)$ [0.5 puntos] con lo que concluimos que $n\mathcal{R}l$ [0.5 puntos].

b) (3 puntos) Probar por inducción que si para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \mathcal{R} (n+1)$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(0) \leq f(n)$.

Solución

Caso base: Demostremos el resultado para $n = 0$ [0.5 puntos]. Esto es claro pues $f(0) \leq f(0)$ [0.5 puntos].

Paso inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos por hipótesis inductiva que $f(0) \leq f(n)$ [0.5 puntos]. Como $n\mathcal{R}(n+1)$ se tiene que $f(n) \leq f(n+1)$ [1 punto], por transitividad del menor o igual concluimos que $f(0) \leq f(n+1)$ [0.5 puntos].

P2. Considere el conjunto $\text{Fin}(\mathbb{N})$, cuyos elementos son los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, es decir,

$$\text{Fin}(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}.$$

Sea la función $g : \text{Fin}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ definida mediante

$$g(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ \sum_{k \in A} k & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Es decir (para A no vacío), $g(A)$ es la suma de los elementos del conjunto A .

- a) (2 puntos) Evalúe la función g en $\{0, 7, 9\}$ y en $\{0, 1, 2, \dots, 500\}$, es decir calcule $g(\{0, 7, 9\})$ y $g(\{0, 1, 2, \dots, 500\})$. Luego calcule la imagen del conjunto $\{\{1\}, \{1, 3, 5\}\}$ para la función g , es decir $g(\{\{1\}, \{1, 3, 5\}\})$.

Obs: $\{0, 1, 2, \dots, 500\}$ son todos los naturales desde 0 hasta 500 inclusive ambos.

Solución

Directamente $g(\{0, 7, 9\}) = \sum_{k \in \{0, 7, 9\}} k = 0 + 7 + 9 = \boxed{16} \leftarrow [0,5 \text{ pts}]$, ahora tomando $A = \{0, 1, 2, \dots, 500\}$ se tiene que $g(A) = \sum_{k \in A} k = \sum_{k=0}^{500} k = \frac{500 \cdot 501}{2} = \boxed{125250} \leftarrow [0,5 \text{ pts}]$. Ahora, por definición de conjunto imagen $g(\{\{1\}, \{1, 3, 5\}\}) = \{g(\{1\}), g(\{1, 3, 5\})\} \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$, calculando en cada caso tenemos $g(\{1\}) = \sum_{k \in \{1\}} k = \boxed{1}$ y $g(\{1, 3, 5\}) = \sum_{k \in \{1, 3, 5\}} k = 1 + 3 + 5 = \boxed{9}$, asignar $[0,2 \text{ pts}]$ por cada uno, luego $g(\{\{1\}, \{1, 3, 5\}\}) = \{1, 9\} \leftarrow [0,4 \text{ pts}]$. ✓

- b) (2 puntos) Muestre que g es epiyectiva pero no inyectiva.

Solución

Para ver que g es epiyectiva sea $n \in \mathbb{N}$ y definamos $A = \{n\} \in \text{Fin}(\mathbb{N})$ se tiene claramente que $g(A) = \sum_{k \in \{n\}} k = \boxed{n} \leftarrow [1 \text{ pto}]$. Ahora g **no** es inyectiva, para ello consideremos (por ejemplo) $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$ ambos $\in \text{Fin}(\mathbb{N})$. Se tiene entonces que $g(A) = g(B) = 3$ con $A \neq B \leftarrow [1 \text{ pto}]$, evidentemente hay otros ejemplos que cumplen el mismo propósito.

- c) (2 puntos) Calcule la preimagen del conjunto $\{1, 2\}$ por la función g , esto significa que debe determinar el conjunto $g^{-1}(\{1, 2\}) \subseteq \text{Fin}(\mathbb{N})$.

Solución

Para determinar lo pedido, se deben encontrar los $A \in \text{Fin}(\mathbb{N})$ tales que $g(A) = 1$ o bien $g(A) = 2 \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$. Notar que si A es tal que $g(A) = 1$ entonces cualquier $m \in A$ necesariamente satisface $m \leq 1 \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$. Solamente $\{0\}$, $\{0, 1\}$ y $\{1\}$ satisfacen esa condición, siendo $\{0, 1\}$ y $\{1\}$ los únicos que además cumplen con $g(A) = 1 \leftarrow [0,6 \text{ pts}]$. Por otro lado por un razonamiento análogo, los $A \in \text{Fin}(\mathbb{N})$ tales que $g(A) = 2$ resultan ser $A = \{0, 2\}$ y $A = \{2\} \leftarrow [0,6 \text{ pts}]$, esto pues si $A \in \text{Fin}(\mathbb{N})$ es tal que $g(A) = 2$ y $m \in A$ entonces $m \leq 2 \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$. Finalmente $g^{-1}(\{1, 2\}) = \{\{0, 1\}, \{1\}, \{0, 2\}, \{2\}\} \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$. ✓