Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2025.

# CONTROL RECUPERATIVO 1

**Nota:** Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la/s hipótesis.

**P1.**

*a*) (3 pts.) Determine el valor de verdad de las proposiciones $p, q, r, s$ sabiendo que la siguiente proposición es verdadera:

$$\big((p \wedge s) \Rightarrow (\overline{r} \vee r)\big) \Rightarrow \Big(\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge (s \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r}\Big).$$

**Solución:**

Observamos primero que $(\overline{r} \vee r)$ es una tautología (siempre verdadera), por lo que podemos sustituir:

$$(p \wedge s) \Rightarrow (\overline{r} \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge s) \Rightarrow V.$$

Una implicación con conclusión verdadera es siempre verdadera, por lo tanto:

$$(p \wedge s) \Rightarrow V \quad \Leftrightarrow \quad V.$$

(0.5pts. por identificar que $(\overline{r} \vee r)$ es tautología y deducir que $(p \wedge s) \Rightarrow (\overline{r} \vee r)$ es verdadera)

Entonces, el lado izquierdo de la implicación principal es verdadero. Como toda la fórmula completa es verdadera, esto obliga a que el lado derecho también lo sea:

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge (s \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r} \quad \Leftrightarrow \quad V.$$

(0.5pts. por deducir que como toda la fórmula es verdadera, eso implica que el lado derecho debe ser verdadero)

Dado que es una conjunción de tres proposiciones, todas deben ser verdaderas. Luego tenemos:

- $\overline{(p \Rightarrow q)}$ es verdadera, lo que implica que $(p \Rightarrow q)$ es falsa, y esto a su vez implica que $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow F$. (0.7 pts.)
- $(s \Leftrightarrow q)$ es verdadera, y dado que $q \Leftrightarrow F$ por el inciso anterior, tenemos $s \Leftrightarrow F$. (0.7 pts.)
- $\overline{r}$ es verdadera, de modo que $r \Leftrightarrow F$. (0.6 pts.)

Por lo tanto, se concluye que:

$$p \Leftrightarrow V, \quad q \Leftrightarrow F, \quad r \Leftrightarrow F, \quad s \Leftrightarrow F.$$

**Indicaciones para la corrección:**

- El enfoque principal esperado consiste en reconocer que $(\overline{r} \vee r)$ es una tautología, lo que implica que el antecedente completo es verdadero. A partir de ello, se debe deducir que el consecuente también debe ser verdadero y analizar cada componente del lado derecho.
- Es válido que el/la estudiante desarrolle el análisis mediante aplicación de reglas lógicas

o mediante análisis por casos, considerando las posibles combinaciones de valores para la implicancia principal que deriva en $V$ (es decir, $V \Rightarrow V$, $F \Rightarrow V$, $F \Rightarrow F$). En ese caso, distribuir el puntaje de acuerdo con la completitud del análisis y la validez de la secuencia lógica.

- Se puede otorgar puntaje parcial si el/la estudiante determina correctamente el valor de verdad de algunas proposiciones ($p$, $q$, $r$, $s$), pero comete errores o presenta justificaciones incompletas en otras.
- No penalizar errores menores de notación o estilo si la estructura lógica del razonamiento es clara y correcta.

*b*) (3 pts.) Sea $E$ un conjunto de referencia y $A, B, C, D$ subconjuntos de $E$. Demuestre que

$$(B \setminus C) \subseteq A \Rightarrow (D \setminus A) \subseteq (D \setminus B) \cup C.$$

**Solución:**

*Primera forma:* Demostración directa.

Supongamos que $(B \setminus C) \subseteq A$ y sea $x \in D \setminus A$. Queremos probar que $x \in (D \setminus B) \cup C$.

- Si $x \notin B$, entonces $x \in D \setminus B$, por lo tanto $x \in (D \setminus B) \cup C$.
- Si $x \in B$, entonces como $x \notin A$, se tiene $x \in B \setminus A$. Supongamos que además $x \notin C$. Entonces $x \in B \setminus C$, y por hipótesis $(B \setminus C) \subseteq A$, lo que implica que $x \in A$, contradicción con la elección de $x \in D \setminus A$.
  Por lo tanto, $x \in C$, y así $x \in (D \setminus B) \cup C$.

En ambos casos, $x \in (D \setminus B) \cup C$, por lo que se concluye la inclusión.

(Distribuir los 3 pts. por considerar todos los posibles casos y justificar la conclusión)

*Segunda forma: Por contradicción.*

Supongamos que $(B \setminus C) \subseteq A$ y que la conclusión no se cumple, es decir,

$$(D \setminus A) \nsubseteq (D \setminus B) \cup C.$$

Entonces existe un elemento $x \in D \setminus A$ tal que $x \notin (D \setminus B) \cup C$, lo que implica que:

$$x \notin D \setminus B \quad \text{y} \quad x \notin C.$$

Como $x \in D \setminus A$, se tiene que $x \in D$. Y como además $x \notin D \setminus B$, se deduce que $x \in B$. Adicionalmente tenemos que $x \notin C$, por lo que podemos concluir que:

$$x \in B \setminus C.$$

Por hipótesis, $(B \setminus C) \subseteq A$, así que $x \in A$, lo cual contradice la elección de $x \in D \setminus A$, es decir, que $x \notin A$. Esta contradicción nos permite concluir que:

$$(D \setminus A) \subseteq (D \setminus B) \cup C.$$

(Distribuir los 3 pts. si se identifica correctamente el elemento que genera la contradicción y se aplican las inclusiones correspondientes)

*Tercera forma: Por contrarrecíproco.*

Demostraremos que si $x \notin (D \setminus B) \cup C$, entonces $x \notin D \setminus A$.
Supongamos que $x \notin (D \setminus B) \cup C$. Entonces:

$$x \notin D \setminus B \quad \text{y} \quad x \notin C.$$

Distinguimos dos casos:

- Si $x \notin D$, entonces automáticamente $x \notin D \setminus A$ (porque $D \setminus A \subseteq D$).
- Si $x \in D$, entonces de $x \notin D \setminus B$ se deduce que $x \in B$, y como además $x \notin C$, tenemos $x \in B \setminus C$. Por hipótesis, esto implica $x \in A$, y por tanto $x \notin D \setminus A$.

En ambos casos, $x \notin D \setminus A$, lo que demuestra la contrarrecíproca del enunciado original.

(3 pts. por análisis correcto de ambos casos y uso de hipótesis)

**Indicaciones para la corrección:**

- Se acepta cualquiera de las tres estrategias: demostración directa, por contradicción o por contrarrecíproco, siempre que el razonamiento esté completo y sea lógicamente válido.
- El/la estudiante puede optar por reescribir las diferencias de conjuntos utilizando la identidad $X \setminus Y = X \cap Y^c$. Este enfoque es completamente válido, siempre que el desarrollo posterior del razonamiento conduzca correctamente a la conclusión requerida.
- En cualquiera de las formas, se espera un análisis detallado de los casos posibles. Cada uno debe conducir correctamente a la conclusión deseada.
- Distribuir los 3 pts. de forma proporcional a la completitud de la argumentación:
  - Hasta 2 pts. si el razonamiento es mayormente correcto pero falta uno de los casos.
  - Hasta 1 pt. si la idea general está esbozada pero no se justifica adecuadamente.
  - 0 pts. si no hay una estrategia válida o hay errores conceptuales graves.

**P2.** (6 pts.) Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple que

$$8 \cdot 7^n - 14 \text{ es divisible por } 21.$$

**Solución:**

Sea $P(n)$ la proposición: "$8 \cdot 7^n - 14$ es divisible por 21".

**Paso base:** $n = 1$. Verificamos $P(1)$:

$$8 \cdot 7^1 - 14 = 56 - 14 = 42 = 2 \cdot 21.$$

Por lo tanto, $P(1)$ es verdadera.

(2 pts. por identificar correctamente el caso base $n = 1$ y mostrar que $P(1)$ es verdadera)

**Paso inductivo:** Supongamos que $P(n)$ es verdadera para algún $n \in \mathbb{N}^*$ fijo, es decir:

$$8 \cdot 7^n - 14 = 21 \cdot m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z}.$$

**+ 1 pto por escribir la hipótesis inductiva correctamente**

Queremos probar que $P(n+1)$ también es verdadera, es decir, que:

$$8 \cdot 7^{n+1} - 14 \text{ es divisible por } 21.$$

Usamos la hipótesis de inducción y factorizamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
8 \cdot 7^{n+1} - 14 &= 7(8 \cdot 7^n) - 14 \\
&= 7(8 \cdot 7^n - 14) + (7 \cdot 14 - 14) \\
&= 7(8 \cdot 7^n - 14) + 84 \\
&= 7(21m) + 21(4) \\
&= 21(7m + 4).
\end{aligned}$$

Dado que $7m + 4 \in \mathbb{Z}$, se concluye que $8 \cdot 7^{n+1} - 14$ también es divisible por 21, es decir, que $P(n+1)$ es verdadera. (3 pts. por aplicar correctamente la hipótesis de inducción, factorizar, y deducir la divisibilidad por 21)

Por el principio de inducción matemática, la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

**Indicaciones para la corrección:**

- El paso base debe considerar explícitamente $n = 1$ (ya que $n \in \mathbb{N}^*$), y comprobar correctamente que el valor resultante es divisible por 21.
- No es necesario que el estudiante escriba explícitamente la proposición $P(n)$, siempre que quede claro qué se está demostrando y que el razonamiento sea correcto.
- Si se omite el uso de la hipótesis de inducción, o si se cometen errores en la factorización o en el argumento de divisibilidad, se debe descontar puntaje de forma proporcional.
- También es válido si el paso inductivo se presenta como:

$$8 \cdot 7^{n+1} - 14 = 7(8 \cdot 7^n - 14) + 84,$$

  y se justifica que ambos sumandos son múltiplos de 21.
- Se acepta una formulación alternativa del paso inductivo del tipo $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, para $n \geq 2$, siempre que el razonamiento esté completo y correctamente aplicado.

**P3.** Sea $A$ un conjunto no vacío y $\rho : A \to A$ una función. Diremos que $\rho$ es una **proyección** si

$$\rho \circ \rho = \rho.$$

*a*) (2 pts.) Considere el conjunto $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y defina

$$\rho_1(x, y) = (x + y^3, 0) \quad \text{para todo } (x, y) \in A.$$

Determinar si $\rho_1$ es una proyección.

**Solución:**
Queremos determinar si $\rho_1$ es una proyección, es decir, si cumple que:

$$\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_1.$$

Sea $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ arbitrario. Aplicamos $\rho_1$ una vez:

$$\rho_1(x, y) = (x + y^3, 0).$$

Ahora aplicamos $\rho_1$ nuevamente sobre ese resultado:

$$\rho_1(\rho_1(x,y)) = \rho_1(x+y^3,0) = ((x+y^3)+0^3,0) = (x+y^3,0) = \rho_1(x,y).$$

(1.5 pts. por aplicar correctamente $\rho_1$ dos veces y obtener la igualdad deseada)

Por lo tanto, se cumple que:

$$\rho_1(\rho_1(x,y)) = \rho_1(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \in A,$$

y se concluye que $\rho_1$ es una proyección.

(0.5 pts. por concluir correctamente que $\rho_1$ cumple la definición de proyección)

**Indicaciones para la corrección:**

- El estudiante debe aplicar correctamente la función $\rho_1$ dos veces y verificar explícitamente que $\rho_1(\rho_1(x,y)) = \rho_1(x,y)$. Puede hacerlo mediante un cálculo directo o de manera más estructurada, como se muestra en esta pauta.

*b)* (2 pts.) Sea $\rho : A \to A$ una proyección arbitraria. Consideremos el conjunto $B = \rho(A) \subseteq A$, donde $\rho(A)$ es la imagen de $A$ por $\rho$. Definimos $\varphi : B \to B$ por

$$\varphi(y) = \rho(y) \quad \text{para todo } y \in B.$$

Demuestre que $\varphi = \mathrm{Id}_B$ (función identidad en $B$).

**Solución:** Para demostrar que $\varphi = \mathrm{Id}_B$, debemos verificar tres condiciones: que ambas funciones tienen el mismo dominio, que ambas tienen el mismo codominio, y que coinciden en la imagen de todo elemento del dominio.

Observamos que $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Id}_B) = B$ y $\mathrm{Cod}(\varphi) = \mathrm{Cod}(\mathrm{Id}_B) = B$.

(0.5 pts. por identificar correctamente dominios y codominios)

Tomamos $y \in B = \rho(A)$ arbitrario. Por definición de conjunto imagen, existe $x \in A$ tal que $y = \rho(x)$. (0.5 pts. por deducir que $y = \rho(x)$ para algún $x \in A$)

Aplicamos la definición de $\varphi$:

$$\varphi(y) = \rho(y).$$

Como $\rho$ es una proyección y además $y = \rho(x)$, se cumple que:

$$y = \rho(x) = \rho(\rho(x)) = \rho(y).$$

(0.5 pts. por aplicar correctamente la definición de proyección y la correcta utilización de $x$)

Por lo tanto,

$$\varphi(y) = \rho(y) = y,$$

es decir, $\varphi(y) = \mathrm{Id}_B(y)$ para todo $y \in B$.

(0.5 pts. por concluir que las funciones son iguales)

**Indicaciones para la corrección:**

- La/el estudiante debe identificar que $\varphi$ y $\mathrm{Id}_B$ tienen el mismo dominio y codominio.
- El punto clave es reconocer que todo $y \in B$ se puede escribir como $y = \rho(x)$ con $x \in A$,

y usar la propiedad de proyección: $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$.

*c*) (2 pts.) Sea $\rho$ una proyección. Demostrar que $\rho$ es epiyectiva si y solo si $\rho$ es una biyección.

**Solución:**

**(⇐)** Esta dirección es inmediata: toda función biyectiva es, en particular, epiyectiva.

(0.5 pts.)

**(⇒)** Supongamos ahora que $\rho$ es epiyectiva. Mostraremos que entonces es inyectiva, y por tanto biyectiva.

*Primera forma:* Usando el resultado del inciso anterior.

Como $\rho$ es epiyectiva, se cumple que $\rho(A) = A$. Por el inciso anterior, la función $\varphi : B \to B$, definida como $\varphi(y) = \rho(y)$ para $y \in B = \rho(A)$, coincide con la identidad en $B$, es decir, $\varphi = \mathrm{Id}_B$.

(0.8 pts. por asociar correctamente a $\varphi = \mathrm{Id}_B$ usando la epiyectividad y el inciso anterior)

Como en este caso $B = A$, se concluye que $\rho = \varphi = \mathrm{Id}_A$, y por tanto es biyectiva.

(0.7 pts. por concluir que la identidad sobre $A$ es biyectiva y que $\rho = \mathrm{Id}_A$)

*Segunda forma:* Mediante la definición de inyectividad.

Sean $y, y' \in A$ tales que $\rho(y) = \rho(y')$. Queremos mostrar que $y = y'$. Como $\rho$ es epiyectiva, existen $x, x' \in A$ tales que $\rho(x) = y$ y $\rho(x') = y'$.

(0.5 pts. por establecer correctamente la existencia de preimágenes usando la epiyectividad)

Entonces, usando que $\rho$ es proyección, tenemos:

$$y = \rho(x) = \rho(\rho(x)) = \rho(y) = \rho(y') = \rho(\rho(x')) = \rho(x') = y'.$$

Por lo tanto, $\rho$ es inyectiva. Como es además epiyectiva por hipótesis, se concluye que es biyectiva. (1 pt. por aplicar correctamente la propiedad de proyección para concluir que $y = y'$)

**Indicaciones para la corrección:**

- La implicancia **biyectiva ⇒ epiyectiva** es inmediata. Basta con que el/la estudiante la mencione correctamente. Si no la escribe explícitamente pero la utiliza de forma implícita en la conclusión de la doble implicación, también es válido.
- Para la implicancia **epiyectiva ⇒ biyectiva**, también es válido usar una caracterización de inyectividad basada en conjuntos, como $\rho^{-1}(\rho(A')) = A'$ para todo $A' \subseteq A$, siempre que se justifique adecuadamente el uso de la proyección y la epiyectividad. Si se emplea esta estrategia (o alguna otra caracterización del apunte), distribuir el puntaje proporcionalmente de acuerdo con la completitud del análisis y la validez de la secuencia lógica.

**TIEMPO: 2 horas.**
**No olvidar anotar su nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.**