Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2025

28 de junio 2025

Control 6: Estructuras algebraicas y números complejos

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la/s hipótesis.

P1. (50%)

(a) **(1,5 pto)** Calcula el número complejo z, expresando el resultado en forma Cartesiana.

$$z = (1-i)^2(1+i)^3$$

Solución: *primera forma:* Notamos que con $w = (1-i)$, tenemos $\bar{w} = 1+i$ y podemos reescribir **+0.5**

$$z = w^2(\bar{w})^3 = (w\bar{w})^2\bar{w} = |w|^4\bar{w}. \quad \textbf{+0.5}$$

Se calcula $|w|^2 = 2$ y remplazando obtenemos

$$z = 4(1+i) = 4+4i \quad \textbf{+0.5}$$

segunda forma: Expandemos directamente en forma Cartesiana.

$$(1-i)^2 = 1-2i-1 = \overset{\textbf{+0.5}}{-2i}, \quad (1+i)^3 = 2i(1+i) = \overset{\textbf{+0.5}}{2i-2}.$$

con eso queda finalmente

$$z = (-2i)(2i-2) = 4+4i. \quad \textbf{+0.5}$$

tercera forma: Escribamos en forma polar

$$(1+i) = \underset{\textbf{+0.5}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}, \quad (1-i) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \text{ o bien } (1-i) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} \quad \textbf{+0.5}$$

Con eso calculamos

$$z = \sqrt{2}^5 e^{-i\pi/2}e^{i3\pi/4} = 4\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 4+4i \quad \textbf{+0.5}$$

Indicaciones para la corrección: En la primera forma, no es necesario asignar una letra w, basta que se identifique una parte como conjugado de la otra. Dar puntaje parcial para calculos coherentes con algún error de cálculo. Puntaje máximo para resultado correcto sin justificación alguna: 0.7.

(b) Considere la ecuación

$$(eq) \quad z^3 = \bar{z}^5 \text{ para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

i. **(1,5 pto)** Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es solución de (eq), determine $|z|$.

Solución: Tomando el módulo de ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$|z^3| = |\bar{z}^5|. \quad \textbf{+0.5}$$

Usando las propiedades del módulo y conjugado, es equivalente a

$$|z|^3 = |z|^5. \quad \textbf{+0.5}$$

+0.2

Como $z \neq 0$, esta ecuación implica $|z| = 1$. **+0.3**

ii. **(3 pto)** Encuentre todas las soluciones de (eq) en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y expréselas en forma polar. Dibújelas en el plano complejo.

Solución: *primera forma:* Por la primera parte del ejercicio, cada solución es de la forma $z = e^{i\theta}$. Insertando esta forma en la ecuación queda

$$e^{3i\theta} = e^{-5i\theta}. \quad \textbf{+0.5}$$

Para satisfacer esta igualdad, necesitamos

$$3\theta = -5\theta \mod 2\pi, \qquad \text{o bien} \qquad 8\theta = l2\pi, l \in \mathbb{Z}. \quad \textbf{+0.5}$$

(1.0 pto) por derivar la ecuación corecta para el argumento.
Concluímos que si z_l es solución, $z_l = e^{il\pi/4}$. Las soluciones diferentes corresponden a las valores $l = 0, 1, 2, ..., 7$. **(1.0 pto)** por escribir las 8 soluciones distintos.´

segunda forma: Por la primera parte del ejercicio, cada solución z tiene módulo 1. En este caso, $\bar{z} = z^{-1}$, por lo que obtenemos

+0.5

$$z^3 = z^{-5}, \text{ es decir } z^8 = 1. \quad \textbf{+0.5}$$

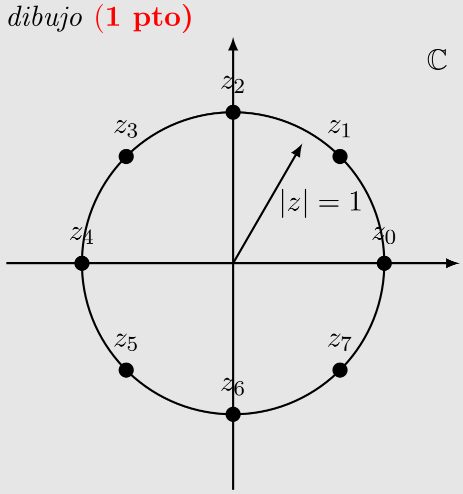
(1.0 pto) por argumentar que se puede rescribir la ecuación de esa forma
Concluímos que las soluciones son las raíces 8-ésimas de la unidad, que por expresión visto en clases son

$$z_l = e^{il\pi/4}, \quad l = 0, \cdots, 7$$

(1.0 pto) por dar las 8 soluciones en forma polar

dibujo **(1 pto)**

Esto es para ambas formas.



Indicaciones para la corrección: Si algún estudiante llega a otra conjunto de soluciones pero las dibujan corectamente en el plano, asignar el puntaje que corresponde al dibujo.

P2. (50%)

Considere el siguiente conjunto de funciones

$$A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$$

con la operación $\circ$, la composición habitual de funciones.

(a) **(1.5 pto)** Demuestre que $\circ$ es una ley de composición interna en A.

+0.5 (puede ser escrito implícito)

Solución: Sean $f_1, f_2 \in A$, necesitamos verificar que $f_1 \circ f_2 \in A$. Escribimos $f_1(x) = a_1 x + b_1$, $f_2(x) = a_2 x + b_2$. Calculamos

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(a_2 x + b_2) = a_1(a_2 x + b_2) + b_1 = a_1 a_2 x + a_1 b_2 + b_1.$$ **+0.5**

Como $a_1, a_2 \neq 0$, $a_1 a_2 \neq 0$ y $f_1 \circ f_2 \in A$. **+0.3**

+0.2

(b) **(1.5 pto)** Determine si $\circ$ es comutativa en A.

Solución: No es comutativa. **+0.5** A modo de contra-ejemplo, tomamos $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = 2x$. Usamos la fórmula obtenido en la parte a) o calculamos nuevamente para obtener

$$(f_1 \circ f_2)(x) = 2x + 1, \quad (f_2 \circ f_1)(x) = 2x + 2.$$

luego, $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$. **+1.0 por probar que no es conmutativa, puede ser cualquier justificación.**

(c) **(1.5 pto)** Determine si existe un elemento neutro para $\circ$ en A.

+0.9 por ver que Id está en A, Id(x) = 1*x + 0

Solución: La función identidad Id está en A y satisface $f \circ \mathsf{Id} = f$, $\mathsf{Id} \circ f = f$ para calquier función (propriedad conocida de funciones). Alternativamente, se puede calcular

$$(f \circ \mathsf{Id})(x) = f(\mathsf{Id}(x)) = f(x), \quad (\mathsf{Id} \circ f)(x) = \mathsf{Id}(f(x)) = f(x).$$

+0.6 por ver que es neutro, 0.3 por cada lado.

(d) **(1.5 pto)** Determine qué elementos de A tienen inversa para $\circ$.

+0.9 por dar el candidato

Solución: Sea $f \in A$, definimos $f(x) = ax + b$. Definimos $g = a^{-1}x - b/a$, que está bien definido ya que $a \neq 0$. Calculamos

+0.3 **+0.3**

$$(f \circ g)(x) = a(a^{-1}x - b/a) + b = x \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = a^{-1}(ax + b) - b/a = x$$

Luego, $f \circ g = g \circ f = \mathsf{Id}$. Concluimos que para cada $f \in A$ existe su inversa para $\circ$.