



CONTROL 6 (PAUTA)

P1. a) (3 ptos.) Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquiera. Demuestre que

$$z^3 + \bar{z}^3 = 0 \wedge |z| = 1 \iff z^6 = -1.$$

Solución

Notar que de ambos lados de la equivalencia que hay que probar se deduce que $|z| = 1$ y por tanto que $z \neq 0$. En efecto, el lado izquierdo incluye explícitamente que $|z| = 1$ y en el derecho, tomando módulo a ambos lados de $z^6 = -1$ (y usando las propiedades del módulo), resulta que $|z|^6 = 1$, y como $|z|$ es un real no negativo, esto implica que $|z| = 1$. (**1 pto.**) Usaremos esos dos hechos en la demostración siguiente de la equivalencia:

$$z^3 + \bar{z}^3 = 0 \wedge |z| = 1 \iff z^6 + (z \cdot \bar{z})^3 = 0 \wedge |z| = 1$$

(multiplicando por z^3 ($\neq 0$), **0.5 ptos.**)

$$\iff z^6 + |z|^6 = 0 \wedge |z| = 1$$

(propiedad: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, **0.5 ptos.**)

$$\iff z^6 + 1 = 0 \wedge |z| = 1 \quad (|z| = 1, \text{ **0.5 ptos.**})$$

$$\iff z^6 = -1 \wedge |z| = 1$$

$$\iff z^6 = -1.$$

($|z| = 1$ es consecuencia de $z^6 = -1$, **0.5 ptos.**)

- b) (3 ptos.) Utilice el resultado de la parte a) para encontrar todos los números $z \in \mathbb{C}$ de módulo 1 que satisfacen la ecuación $z^3 + \bar{z}^3 = 0$. Haga además un bosquejo de estos números en el plano complejo.

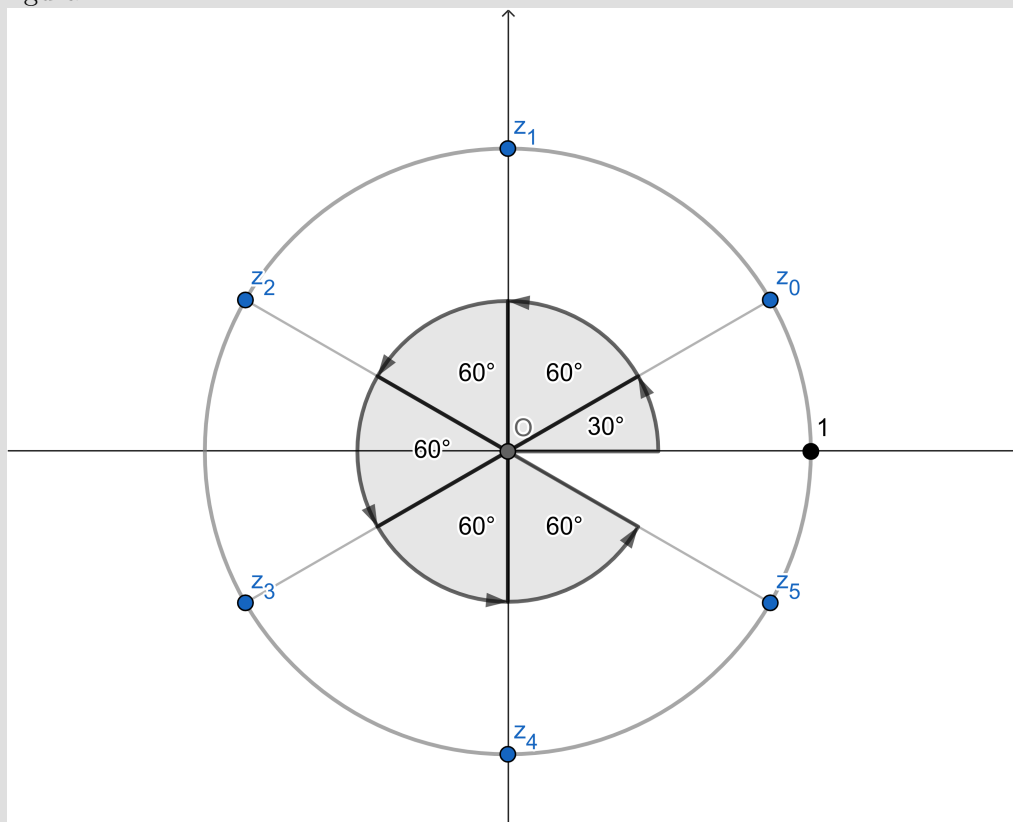
Solución

De la parte a) se sabe que las soluciones pedidas son exactamente las soluciones de la ecuación $z^6 = -1$, esto es, las raíces sextas del complejo -1 .

Como $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ (**0.5 ptos.**), de lo que sabemos de raíces n -ésimas de un complejo, se tiene que si $z_0 = 1^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ y si $\rho = e^{i\frac{2\pi}{6}}$, entonces las seis raíces sextas de -1 son $z_k = z_0 \cdot \rho^k = e^{i(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{6})}$, $k = 0, 1, \dots, 5$. Así, las soluciones pedidas son:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, z_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}}, z_5 = e^{i\frac{11\pi}{6}}. \quad (\text{1.5 ptos.})$$

Gráficamente, estos son complejos de módulo 1, es decir, están en la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, y se obtienen girando sucesivamente en $\frac{2\pi}{6}$ (esto es, 60°) a partir de la primera raíz $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, como se muestra en la figura:



(1 pto.)

P2. Sea X un conjunto infinito. Considere el anillo $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$, donde

$$A + B := A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{y} \quad A \cdot B := A \cap B.$$

Notar que $\emptyset$ es el neutro para $+$ y que $A \Delta A = \emptyset$, para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$.

- a) (3 ptos.) Pruebe que $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathcal{P}(X), +)$, donde

$$H = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es finito}\}.$$

Solución

Notemos que, como $A \Delta A = \emptyset$, se tiene que $-A = A$, es decir, todo elemento es su propio inverso aditivo (**1 pto.**) Además, como $\emptyset$ es finito, se tiene que $\emptyset \in H$ y por lo tanto H no es vacío (**1 pto.**) Así, usando la caracterización de subgrupo basta probar que para todo A, B en H , se tiene que $A + B = A \Delta B$ pertenece a H . Esto ocurre ya que, como la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito, se tiene que la diferencia simétrica también. Concluimos que $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathcal{P}(X), +)$. (**1 pto.**)

- b) (3 ptos.) Pruebe que todo elemento $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$, es divisor de cero en el anillo $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$.

Solución

Sea $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$. Se tiene que A es divisor de cero si y solo si existe $B \neq \emptyset$ tal que $A \cdot B = A \cap B = \emptyset$. Como $A \neq X$, su complemento no es vacío (**1.5 ptos.**) Luego, para $B = A^c$ se tiene que $A \cdot A^c = A \cap A^c = \emptyset$, lo que implica que A es divisor de cero en el anillo $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ (**1.5 ptos.**)