

CONTROL 5

Nota: Por favor, si algún/a estudiante lo resuelve de otra forma ser cuidadosos(as) en la corrección, preguntar si no saben si es correcto, y no poner todo malo por no ser la forma que se presenta en la pauta.

P1. (70 %) Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a + d = b + c$$

a) **(2.0)** Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

Solución:

- *Reflexiva:* Sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Entonces

$$(a, b)\mathcal{R}(a, b) \iff a + b = b + a \iff 0 = 0$$

Por ende se cumple que es reflexiva **(0.4)**

- *Transitividad:* Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ y $(c, d)\mathcal{R}(e, f)$. Entonces tenemos que

$$a + d = c + b$$

$$c + f = d + e$$

Sumando ambas expresiones tenemos que $a + c + d + f = b + c + d + e$, y cancelando términos semejantes se obtiene que $a + f = b + e$, con lo cual se concluye que $(a, b)\mathcal{R}(e, f)$, probando transitividad. **(0.8)**.

- *Simetría:* Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$. Por ende

$$a + d = b + c$$

Por conmutatividad de la suma se tiene que

$$a + d = b + c \iff d + a = c + b \iff (c, d)\mathcal{R}(a, b)$$

Con lo cual se prueba la simetría **(0.8)**

Indicaciones para la corrección: NO dar puntaje por definiciones (de las propiedades o de estar relacionados). Independiente de si lo desarrollan con implica/equivalencias o palabras, si los argumentos son correctos, asignar puntaje. En la simétrica no es necesario argumentar conmutatividad de la suma, basta con que se den cuenta de que es lo mismo.

b) **(1.0)** Calcule $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$, $[(0, 2)]_{\mathcal{R}}$ y $[(2, 0)]_{\mathcal{R}}$.

Solución: Se tiene que $[(x, y)]_{\mathcal{R}} = \{(a, b) : (x, y)\mathcal{R}(a, b)\}$ **(0.1)**.

•

$$\begin{aligned} [(0, 0)]_{\mathcal{R}} &= \{(a, b) : (0, 0)\mathcal{R}(a, b)\} \\ &= \{(a, b) : 0 + b = 0 + a\} \\ &= \{(a, b) : a = b\} \\ &= \{(a, a) : a \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} [(0, 2)]_{\mathcal{R}} &= \{(a, b) : (0, 2)\mathcal{R}(a, b)\} \\ &= \{(a, b) : 0 + b = 2 + a\} \\ &= \{(a, b) : b = a + 2\} \\ &= \{(a, a + 2) : a \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} [(2, 0)]_{\mathcal{R}} &= \{(a, b) : (2, 0)\mathcal{R}(a, b)\} \\ &= \{(a, b) : 2 + b = 0 + a\} \\ &= \{(a, b) : a = b + 2\} \\ &= \{(b + 2, b) : b \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

(0.3) por cada clase de equivalencia.

Indicaciones para la corrección: No es necesario que escriba la definición de clase de equivalencia por separado. Si la usa bien para alguna clase dar 0.1. No es necesario que trabajen como igualdad de conjuntos, con tal que caractericen bien la forma que tienen los elementos en cada clase asignar todo el puntaje.

c) Sean $a, b \in \mathbb{N}$.

c.1) **(0.5)** Demuestre que si $a \leq b$, entonces $(a, b)\mathcal{R}(0, b - a)$.

Solución: Sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $a \leq b$, notemos que en este caso $b - a \in \mathbb{N}$ y por ende $(0, b - a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ **(0.2)** y que

$$(a, b)\mathcal{R}(0, b - a) \iff a + (b - a) = b + 0$$

Pueden decir: $0 = 0$ o $b = b$ o simplemente decir que es claro con la última ecuación que están relacionados.

Y por ende se cumple que $(a, b)\mathcal{R}(0, b - a)$ **(0.3)**.

Indicaciones para la corrección: Deben justificar que $(0, b - a)$ está en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en este caso, aparte de verificar que satisfacen condición de estar relacionados.

c.2) **(0.5)** Demuestre que si $a \geq b$, entonces $(a, b)\mathcal{R}(a - b, 0)$.

Solución: Sea $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $a \geq b$, notemos que en este caso $a - b \in \mathbb{N}$ y por ende $(a - b, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ **(0.2)** y que

$$(a, b)\mathcal{R}(a - b, 0) \iff a + 0 = b + (a - b)$$

Pueden decir: $0 = 0$ o $a = a$ o simplemente decir que es claro con la última ecuación que están relacionados.

Y por ende se cumple que $(a, b)\mathcal{R}(a - b, 0)$ **(0.3)**.

Indicaciones para la corrección: Deben justificar que $(a - b, 0)$ está en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en este caso, aparte de verificar que satisfacen condición de estar relacionados.

d) Sea $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ el conjunto cociente de la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} [(n, 0)]_{\mathcal{R}} & n \geq 0 \\ [(0, -n)]_{\mathcal{R}} & n < 0 \end{cases}$$

Se sabe (no es necesario que lo demuestre) que esta función es inyectiva.

d.1) **(1.5)** Demuestre que la función f es epiyectiva.

Solución: Se debe probar que toda clase de equivalencia en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ tiene una preimagen en $\mathbb{Z}$. En efecto, sea $X \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ una clase de equivalencia y sea $(a, b) \in X$ un representante cualquiera de la clase, es decir, $X = [(a, b)]_{\mathcal{R}}$. Dividimos en dos casos: $a < b$ y $a \geq b$. En ambos casos debemos probar que $[(a, b)]_{\mathcal{R}}$ tiene preimagen según f . **(0.1)**

- Si $a < b$, entonces por parte c.1) se cumple que $(a, b)\mathcal{R}(0, b - a)$ **(0.2)**. Por ende se cumple que $[(a, b)]_{\mathcal{R}} = [(0, b - a)]_{\mathcal{R}}$ **(0.2)**. Además, como $a < b$ entonces $a - b \in \mathbb{Z}$ y $a - b < 0$, por ende tomando $n = a - b$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(n) &= [(0, -n)]_{\mathcal{R}} && \text{ya que } n < 0 \\ &= [(0, b - a)]_{\mathcal{R}} && \text{usando c.1)} \\ &= [(a, b)]_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Es decir, $n = a - b$ es preimagen de $[(a, b)]_{\mathcal{R}}$. **(0.3)**

- Si $a \geq b$, entonces por parte c.2) se cumple que $(a, b)\mathcal{R}(a - b, 0)$ **(0.2)**. Por ende se cumple que $[(a, b)]_{\mathcal{R}} = [(a - b, 0)]_{\mathcal{R}}$ **(0.2)**. Además, como $a \geq b$ entonces $a - b \in \mathbb{Z}$ y $a - b \geq 0$, por ende tomando $n = a - b$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(n) &= [(n, 0)]_{\mathcal{R}} && \text{ya que } n \geq 0 \\ &= [(a - b, 0)]_{\mathcal{R}} && \text{usando c.2)} \\ &= [(a, b)]_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Es decir, $n = a - b$ es preimagen de $[(a, b)]_{\mathcal{R}}$. **(0.3)**

Indicaciones para la corrección: Si comprueban la epiyectividad correctamente sin mencionar que buscan una preimagen para cada elemento del codominio, no descontar esa décima.

d.2) **(0.5)** Concluya que el conjunto $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ es numerable.

Solución:

- **Forma 1:** Se sabe por enunciado que la función f es inyectiva y además por la parte d.1) también es epiyectiva. Por ende la función es biyectiva. Luego, por definición de igualdad de cardinales se cumple que $|\mathbb{Z}| = |(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}|$. **(0.3)**
Para concluir tenemos por resultado visto en clases que $\mathbb{Z}$ es numerable y por ende $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ también es numerable. **(0.2)**
- **Forma 2.** Como la función es epiyectiva, entonces $|\mathbb{Z}| \geq |(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}|$ y por clases sabemos que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. Por ende $|\mathbb{N}| \geq |(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}|$ **(0.3)**. Finalmente, como la función f es inyectiva por enunciado entonces

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$$

es infinito, ya que $\mathbb{Z}$ lo es. Por ende se concluye que $|(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}| \geq |\mathbb{N}|$ y por doble desigualdad se concluye que $|(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}| = |\mathbb{N}|$. **(0.2)**

Indicaciones para la corrección: En Forma 2, no descontar si solo usan, sin justificar, que $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ es infinito.

P2. (30 %) Sea $A = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20\}$.

a) **(3.0)** Calcule el cardinal del conjunto

$$\mathcal{X} = \{B \subseteq A : (|B| = 5) \wedge (1 \in B)\}$$

Solución: Se cumple que $B \in \mathcal{X}$ si y solo si $|B| = 5$ y $1 \in B$. Una caracterización equivalente es la siguiente.

Basta observar que los subconjuntos de A con 5 elementos que contienen al 1 son aquellos que tienen al 1 fijo, y cuatro elementos del conjunto $\{2, 3, \dots, 20\}$. **(1.0)**

Así, se tiene que $|\mathcal{X}|$ es igual al cardinal de todos los subconjuntos de tamaño 4 del conjunto $\{2, 3, \dots, 20\}$, o lo que es lo mismo, $A \setminus \{1\}$ que tiene 19 elementos. **(0.5)**

Por ende:

$$|\mathcal{X}| = \binom{19}{4} \quad \mathbf{(1.5)}$$

Indicaciones para la corrección: No es necesario que calculen el binomial final, basta con que lo dejen expresado. Si llegan mediante argumentos correctos a caracterizar $|\mathcal{X}|$ como el cardinal de un conjunto conocido asignar puntaje completo.

b) **(3.0)** Calcule el cardinal del conjunto

$$\mathcal{Y} = \{B \subseteq A : (|B| = 5) \vee (1 \in B)\}$$

Solución: Forma 1:

Definiendo

$$D_1 = \{B \subseteq A: |B| = 5\}$$

$$D_2 = \{B \subseteq A: 1 \in B\}$$

Se tiene que $\mathcal{Y} = D_1 \cup D_2$. **(0.5 ptos)**

Por fórmula de la cardinalidad de la unión vista del apunte se cumple que

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}| &= |D_1 \cup D_2| \\ &= |D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2| \end{aligned} \quad \textbf{(0,5ptos)}$$

Es claro que $D_1 \cap D_2 = \mathcal{X}$, pueden usar lo calculado en el ítem anterior.

Forma 2: Basta que digan que por un lado tomarán los subconjuntos que contienen al 1, que por otro lado aquellos de 5 elementos, dado que los conjuntos que contienen al 1 de cardinalidad 5 están en la intersección de ambas familias de conjuntos, debemos restar la cardinalidad de $|\mathcal{X}|$. **(1 ptos). ESTE PUNTO EQUIVALE A LOS DOS (0.5 ANTERIORES)**

Formas 1 y 2 calculamos: (Continuación)

Ahora: $|D_1| = \binom{20}{5}$ **(0.5 ptos)**.

Por otro lado, $|D_2| = |\mathcal{P}(A \setminus \{1\})|$ o $|\mathcal{P}(\{2, \dots, 19\})| = 2^{19}$. **(0.5 ptos)**

Finalmente

$$\begin{aligned} D_1 \cap D_2 &= \{B \subseteq A: |B| = 5 \wedge 1 \in B\} \\ &= \mathcal{X} \end{aligned}$$

Y por parte a) sabemos que $|\mathcal{X}| = \binom{19}{4}$. **(0.5 ptos)**

Por ende se concluye que $|\mathcal{Y}| = \binom{20}{5} + 2^{19} - \binom{19}{4}$. **(0.5 ptos)**

Forma 3:

También podemos realizar este cálculo tomando, por un lado los subconjuntos de A que no contienen al 1 y tienen cardinalidad igual a 5 (equivalente a $D_1 \setminus \mathcal{X}$) y a eso sumarle todos los subconjuntos de A que contienen al 1 (equivalente a D_2). **(2 ptos)**

Por ende se concluye que $|\mathcal{Y}| = \binom{19}{5} + 2^{19}$. **(1 ptos)**

Indicaciones para la corrección: Idem P2.a) Si habían calculado mal la cardinalidad de $\mathcal{X}$ y ahora la usan coherentemente no descontar puntaje nuevamente.