



PAUTA DEL CONTROL 5

P1. (60 %)

Sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ la ley de composición interna por

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (a, b) \Delta (c, d) = (ad + cb, bd).$$

a) (1,5 ptos.) Demuestre que Δ es conmutativa.

Solución

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Se tiene

$$\begin{aligned}(a, b) \Delta (c, d) &= (ad + cb, bd) \\ &= (cb + ad, db) \text{.....} \mathbf{0,8 \text{ ptos.}} \\ &= (c, d) \Delta (a, b)\end{aligned}$$

Por lo tanto, Δ es conmutativa. **0,7 ptos.**

Comentarios para corrección

Si escribió $(a, b) \Delta (c, d) = (ad + cb, bd)$ y $(c, d) \Delta (a, b) = (ca + ad, db)$ por separado, asignar **0,6 ptos.** por cada igualdad y **0,3 ptos.** por usar la conmutatividad en $\mathbb{Z}$ y concluir.

b) (1,5 ptos.) Encuentre el neutro para Δ .

Solución

$(e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ es neutro si y solo si, para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ se tiene que $(a, b) \Delta (e, f) = (e, f) \Delta (a, b) = (a, b)$. Como Δ es conmutativa, basta considerar solo la igualdad $(a, b) \Delta (e, f) = (a, b)$. **0,5 ptos.** Veamos,

$$\begin{aligned}(a, b) \Delta (e, f) = (a, b) &\iff (af + eb, bf) = (a, b) \\ &\iff af + ef = a, bf = b \text{.....} \mathbf{0,5 \text{ ptos.}} \\ &\iff e = 0 \wedge f = 1 \quad (b \neq 0).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el neutro es $(0, 1)$. **0,5 ptos.**

Comentarios para corrección

Si hizo las dos igualdades sin usar conmutatividad se asignan los mismos 0,5 ptos.

- c) (1,5 ptos.) Encuentre el conjunto de elementos invertibles para Δ con sus respectivos inversos.

Solución

$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tiene inverso $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ si y solo si $(a, b)\Delta(c, d) = (c, d)\Delta(a, b) = (0, 1)$. Por la conmutatividad de Δ , basta considerar solo la igualdad $(a, b)\Delta(c, d) = (0, 1)$. **0,5 ptos.** Veamos,

$$\begin{aligned}(a, b)\Delta(c, d) = (0, 1) &\iff (ad + cb, bd) = (0, 1) \\ &\iff ad + cb = 0 \wedge bd = 1 \\ &\iff b = d = 1 \wedge c = -a,\end{aligned}$$

pues $b, d \in \mathbb{N}^*$. **0,5 ptos.** Por lo tanto, (a, b) es invertible si y solo si $b = 1$ y $a \in \mathbb{Z}$. Tales elementos tienen inverso $(-a, 1)$. **0,5 ptos.**

Comentarios para corrección

Si hizo los inversos por ambos lados por separado sin usar conmutatividad se asignan los mismos 0,5 ptos.

- d) (1,5 ptos.) Pruebe que la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ definida mediante $f(a, b) = \frac{a}{b}$ es un homomorfismo epiyectivo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \Delta)$ en $(\mathbb{Q}, +)$.

Solución

f es homomorfismo pues, para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\begin{aligned}f(a, b) + f(c, d) &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad + bc}{bd} \text{0,5 ptos.} \\ &= f(ad + bc, bd) \\ &= f((a, b)\Delta(c, d)) \text{0,5 ptos.}\end{aligned}$$

Finalmente, f es epiyectiva pues, dado un racional $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, se tiene que $\frac{a}{b} = f(a, b)$, con $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ si $b \in \mathbb{N}^*$ y $\frac{a}{b} = f(-a, -b)$, con $(-a, -b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ si $b \in \mathbb{Z}$ y $b < 0$. **0,5 ptos.**

Comentarios para corrección

Asignar 0,3 de los 0,5 puntos de la epiyectividad si no estudian el caso $b < 0$.

P2. (40 %)

- a) (3 ptos.) Sea $a > 0$ un número real positivo. Demuestre que el conjunto

$$\sqrt{a}\mathbb{N} = \{\sqrt{a} \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

es numerable.

Solución

El conjunto es numerable pues la función $f : \sqrt{a}\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(\sqrt{a} \cdot n) = n$ es biyectiva. **1,5 ptos.** En efecto, la función $g : \mathbb{N} \rightarrow \sqrt{a}\mathbb{N}$ definida mediante $g(n) = \sqrt{a} \cdot n$ es la inversa **0,5 ptos.** Para $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(\sqrt{a} \cdot n) = n$ **0,5 ptos.** y, para $\sqrt{a} \cdot n \in \sqrt{a}\mathbb{N}$, $(g \circ f)(\sqrt{a} \cdot n) = g(f(\sqrt{a} \cdot n)) = g(n) = \sqrt{a} \cdot n$. **0,5 ptos.**

Otra forma para probar la biyectividad de f . Por definición: para la inyectividad, sean $\sqrt{a} \cdot n, \sqrt{a} \cdot m \in \sqrt{a}\mathbb{N}$ tales que $f(\sqrt{a} \cdot n) = f(\sqrt{a} \cdot m)$. Entonces, $n = m$ y por lo tanto, $\sqrt{a} \cdot n = \sqrt{a} \cdot m$. **0,8 ptos.** Por otra parte, f es epiyectiva pues si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n = f(\sqrt{a} \cdot n)$. **0,7 ptos.**

- b) (3 ptos.) Demuestre que el conjunto

$$A = \{x \cdot n \mid x \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

es numerable.

Solución

Primera forma. Notemos que $A = \sqrt{2}\mathbb{N} \cup \sqrt{3}\mathbb{N}$ **1,5 ptos.** es unión de conjuntos numerables por la parte a) y, por lo tanto, es numerable. **1,5 ptos.**

Segunda forma. Enumerar directamente, usando, por ejemplo, los pares positivos para los elementos de la forma $\sqrt{2} \cdot n$ y los impares para los de la forma $\sqrt{3} \cdot n$. Es decir, considerar la función $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow A$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \sqrt{3} \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar. } \end{cases} \quad \textbf{1,5 ptos.}$$

f es inyectiva pues, si $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ satisfacen $f(n) = f(m)$, entonces n y m tienen igual paridad pues, de lo contrario se obtendría que, $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ es racional. Ahora, si n y m tienen igual paridad, entonces $f(n) = f(m)$ implica que $\sqrt{2} \frac{n}{2} = \sqrt{2} \frac{m}{2}$ o que $\sqrt{3} \frac{n+1}{2} = \sqrt{3} \frac{m+1}{2}$ y, en cualquier caso, se tiene que $n = m$. **1 pto.** Por otra parte, f es epiyectiva pues si $x \cdot n \in A$, entonces $x \cdot n = f(2n)$ si $x = \sqrt{2}$ y $x \cdot n = f(2n - 1)$ si $x = \sqrt{3}$. **0,5 ptos.**

Comentarios para corrección

En la segunda forma se puede probar solo la epiyectividad **0,5 ptos.** y argumentar que A es infinito y $|A| = |f(\mathbb{N} \setminus \{0\})| \leq |\mathbb{N} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}|$ **1 pto.**