CONTROL 4

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la/s hipótesis.

P1. *a*) (3 ptos.) Calcule la suma

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}5^k.$$

Solución: Primero, notemos que

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k\cdot(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

(**1 punto** por desarrollar esta expresión.)
Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}5^k &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}5^k - 5^{n+1} - \binom{n+1}{1}5 - \binom{n+1}{0}5^0\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(6^{n+1} - 5^{n+1} - 5(n+1) - 1\right)\end{aligned}$$

(**1 punto** por completar bien la suma del binomio de Newton y **1 punto** por calcular bien el valor.)

b) Sea $a \neq \pm 1$.

b.i) (1 ptos.) Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{a^{2^k}+1} = \frac{1}{a^{2^k}-1} - \frac{2}{a^{2^{k+1}}-1}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^{2^k}-1} - \frac{2}{a^{2^{k+1}}-1} &= \frac{(a^{2^{k+1}}-1) - 2\cdot(a^{2^k}-1)}{(a^{2^k}-1)\cdot(a^{2^{k+1}}-1)}\\ &= \frac{a^{2^{k+1}} - 2a^{2^k} + 1}{(a^{2^k}-1)\cdot(a^{2^{k+1}}-1)}\\ &= \frac{(a^{2^k}-1)^2}{(a^{2^k}-1)\cdot(a^{2^{k+1}}-1)}\end{aligned}$$

(Hasta aquí **0.5 puntos**.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^{2^k}-1}-\frac{2}{a^{2^{k+1}}-1} &= \frac{(a^{2^k}-1)^2}{(a^{2^k}-1)\cdot(a^{2^{k+1}}-1)}\\ &= \frac{(a^{2^k}-1)^2}{(a^{2^k}-1)\cdot(a^{2^k}-1)(a^{2^k}+1)}\\ &= \frac{1}{a^{2^k}+1}.\end{aligned}$$

(**0.5 puntos** por completar la demostración).

b.ii) (2 ptos.) Calcule la suma

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{a^{2^k}+1}.$$

Solución: Usando la parte b.i), se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{a^{2^k}+1} &= \sum_{k=0}^{n}2^k\cdot\left(\frac{1}{a^{2^k}-1}-\frac{2}{a^{2^{k+1}}-1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{a^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1}\right)\\ &= \frac{2^0}{a^{2^0}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}\\ &= \frac{1}{a-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}.\end{aligned}$$

(**1 punto** por expresar la suma como una suma telescópica y **1 punto** por calcular bien el valor de la suma.)

P2. *a*) (3 ptos.) Sea $\mathcal{R}$ la relación sobre $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ definida por

$$(a,b)\mathcal{R}(x,y) \iff \frac{a}{x}=2^{b-y}.$$

Pruebe que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

Solución:
Refleja: Sea $(a,b)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Entonces,

$$(a,b)\mathcal{R}(a,b) \iff \frac{a}{a}=2^{b-b} \iff 1=2^0,$$

así $\mathcal{R}$ es refleja **(1 punto)**.

Simétrica: Sean $(a,b),(x,y)\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tales que $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$. Entonces,

$$(a,b)\mathcal{R}(x,y)\Rightarrow\frac{a}{x}=2^{b-y}\Rightarrow\frac{x}{a}=2^{-(b-y)}=2^{y-b}\Rightarrow(x,y)\mathcal{R}(a,b),$$

por lo que $\mathcal{R}$ es simétrica **(1 punto)**.

Transitiva: Sean $(a,b),(x,y),(w,z) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tales que $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$ y $(x,y)\mathcal{R}(w,z)$. Primero notamos que $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$ implica

$$\frac{a}{x} = 2^{b-y} \tag{1}$$

y $(x,y)\mathcal{R}(w,z)$ implica

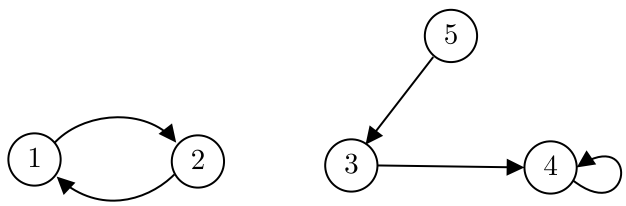
$$\frac{x}{w} = 2^{y-z}. \tag{2}$$

Así, (1) y (2) juntos implican que

$$\frac{a}{w} = \frac{a}{x}\cdot\frac{x}{w} = 2^{b-y}\cdot 2^{y-z} = 2^{b-y+(y-z)} = 2^{b-z}$$

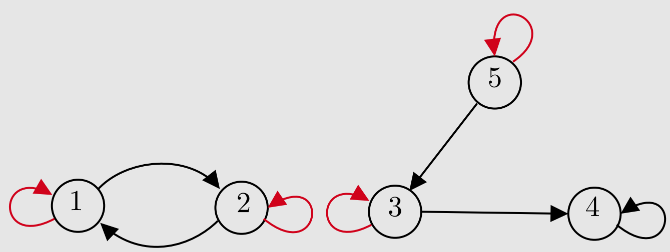
y por lo tanto $(a,b)\mathcal{R}(w,z)$. Luego, $\mathcal{R}$ es transitiva **(1 punto)**.

b) Sea $\mathcal{Q}$ la relación dada por el siguiente el digrafo[1]:



b.i) (1.5 ptos.) Dibuje la **menor** cantidad de flechas necesarias al diagrama de $\mathcal{Q}$ de modo que el digrafo resultante corresponda a una relación refleja. **Justifique cada flecha agregada.**

Solución: Las aristas rojas corresponden a las que hay que agregar.

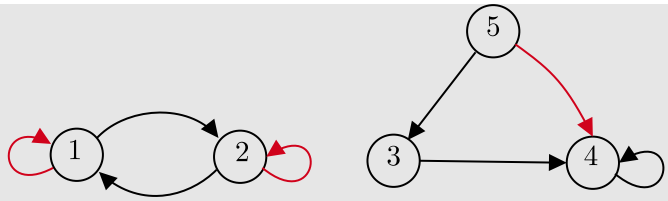


Como queremos que la relación sea refleja, necesitamos agregar todas las aristas de la forma (i,i) que no estén, es decir, agregamos $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ y $(4,4)$. **1.5 puntos** si están todas las aristas y están bien justificadas.

b.ii) (1.5 ptos.) Dibuje la **menor** cantidad de flechas necesarias al diagrama de $\mathcal{Q}$ de modo que el digrafo resultante corresponda a una relación transitiva. **Justifique cada flecha agregada.**

Solución: Las aristas rojas corresponden a las que hay que agregar.

[1] Recuerde que dada una relación $\mathcal{Q}$ sobre un conjunto finito $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$, el digrafo asociado a $\mathcal{Q}$ tiene por vértices $a_1,\ldots,a_n$ y donde hay una flecha (arista) desde a_i hacia a_j si y solo si $a_i\mathcal{Q}a_j$.

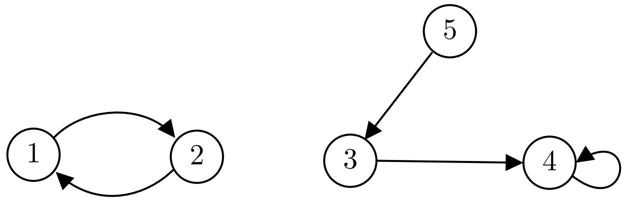


- Como $1\mathcal{Q}2$ y $2\mathcal{Q}1$, entonces debemos agregar la arista $(1, 1)$.
- Como $2\mathcal{Q}1$ y $1\mathcal{Q}2$, entonces debemos agregar la arista $(2, 2)$.
- Como $5\mathcal{Q}3$ y $3\mathcal{Q}4$, entonces debemos agregar la arista $(5, 4)$.

Cada arista bien justificada tiene **0.5 puntos**.

TIEMPO: 1 hora y 15 minutos.
No olvidar anotar su nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

•) Respuesta pregunta b.i)



•) Respuesta pregunta b.ii)