



Control 3 Recuperativo

P1. a) (1.5 ptos.) Encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z - i| = |z + i|$.

Solución: Al ser números positivos, $|z - i| = |z + i| \iff |z - i|^2 = |z + i|^2$ (0.4 ptos.).
Luego

$$\begin{aligned} |z - i|^2 = |z + i|^2 &\iff (z - i)\overline{(z - i)} = (z + i)\overline{(z + i)} \\ &\iff (z - i)(\bar{z} + i) = (z + i)(\bar{z} - i) \\ &\iff z\bar{z} + (z - \bar{z})i - i^2 = z\bar{z} - (z - \bar{z})i - i^2 \\ &\iff 2(z - \bar{z})i = 0 \\ &\iff z - \bar{z} = 0 \quad (0.8 \text{ ptos.}) \end{aligned}$$

Como $z = \bar{z}$, concluimos que $z \in \mathbb{R}$. Es decir, los z que satisfacen la igualdad son todos los que solo tienen parte real. (0.3 ptos.)

b) El propósito de esta parte es demostrar que para todos $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene que:

$$|z + w| = |z| + |w| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \text{ tal que } w = \alpha z.$$

i) (1.0 ptos.) Pruebe que se tiene la implicancia hacia la izquierda ($\Leftarrow$).

Solución: Sean $w, z \in \mathbb{C}$ y $\alpha > 0$ tales que $w = \alpha z$. Luego

$$|z + w| = |z + \alpha z| = |(1 + \alpha)z| = |1 + \alpha||z| = (1 + \alpha)|z| = |z| + \alpha|z| = |z| + |\alpha z| = |z| + |w|.$$

donde se ha usado que $\alpha > 0 \implies 1 + \alpha > 0$. (1.0 pto.)

ii) (1.0 ptos.) Pruebe que $|z + w| = |z| + |w| \implies \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w|$.

Solución:

$$\begin{aligned} |z + w| = |z| + |w| &\iff |z + w|^2 = (|z| + |w|)^2 \quad (0.2 \text{ ptos.}) \\ &\iff (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &\iff (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &\iff z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \quad (0.4 \text{ ptos.}) \\ &\iff |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &\iff \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w| \quad (0.4 \text{ ptos.}) \end{aligned}$$

iii) (1.5 pto.) Considere $z = a + bi$ y $w = c + di$. Pruebe que:

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w| \implies (ac > 0 \vee bd > 0) \wedge ad - bc = 0.$$

Solución: Notemos que $z\bar{w} = (a+bi)(c-di) = (ac+bd) - (ad-bc)i$ **(0.2 ptos.)**. Luego, $ac+bd = \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w| > 0$ y por tanto $ac > 0$ o bien $bd > 0$ (o ambos). **(0.3 ptos.)** Por otro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z||w| &\iff ac+bd = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\ &\implies (ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &\iff (ac)^2 + 2(ac)(bd) + (bd)^2 = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\ &\iff (ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2 = 0 \\ &\iff (ad-bc)^2 = 0 \\ &\iff ad-bc = 0. \quad \textbf{(1.0 pto.)} \end{aligned}$$

iv) (1.0 pto.) Usando lo anterior, pruebe la implicancia hacia la derecha ($\implies$).

Solución: Sean $z = a+bi$ y $w = c+di$ tales que $|z+w| = |z|+|w|$. Por lo anterior, $ac > 0$ o $bd > 0$. Supongamos primero que $ac > 0$. Notemos que en particular $a \neq 0$ y que a y c tienen el mismo signo **(0.2 ptos.)**. Luego $ad-bc = 0 \implies d = \frac{bc}{a}$ y por tanto $w = c+di = c + \frac{bc}{a}i = \frac{c}{a}(a+bi) = \frac{c}{a}z$ **(0.2 ptos.)**. Por lo anterior, $\alpha = \frac{c}{a} > 0$. **(0.1 ptos.)**

Procedemos de manera análoga cuando $bd > 0$. Observamos que $b \neq 0$, que b y d tienen el mismo signo **(0.2 ptos.)** y además que $ad-bc = 0 \implies c = \frac{ad}{b} \implies w = c+di = \frac{ad}{b} + di = \frac{d}{b}(a+bi) = \frac{d}{b}z$ **(0.2 ptos.)**. En este caso, tomamos $\alpha = \frac{d}{b} > 0$. **(0.1 ptos.)**

P2. a) Sea $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ y $*$ una operación definida como $x*y = x+y+x \cdot y$, para todos $x, y \in S$.

i) (1.5 ptos.) Muestre que $*$ es ley de composición interna en S .

Indicación: Puede resultar útil escribir $x*y$ en términos de $x+1$ e $y+1$.

Solución:

Primera forma: Observemos que $x*y = x+y+x \cdot y = (x+1)(y+1) - 1$ **(1.0 pto.)**. Luego, $x \neq -1 \wedge y \neq -1 \implies (x+1)(y+1) \neq 0 \implies x*y \neq -1$. **(0.5 ptos.)**

Segunda forma: Notemos que $x \neq -1 \implies x*y = x+y+x \cdot y \neq -1+y-y = -1$. **(1.5 ptos.)**

ii) (2.0 ptos.) Muestre que $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow S$ tal que $f(x) = x-1$ es un isomorfismo de $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ a $(S, *)$.

Solución: Primero mostremos que f es homomorfismo, es decir, que para todos $x, y \in \mathbb{Q}$, $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ **(0.2 ptos.)**. Calculando tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) * f(y) &= (x-1) * (y-1) \\ &= (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) \quad \textbf{(0.5 ptos.)} \\ &= x+y-2+xy-x-y+1 \\ &= xy-1 \\ &= f(x \cdot y) \quad \textbf{(0.5 ptos.)} \end{aligned}$$

Es claro que f es inyectiva, ya que $x \neq y$, entonces $x-1 \neq y-1 \implies f(x) \neq f(y)$. **(0.3 ptos.)**

Por otra lado, es inmediato que f es epiyectiva, ya que para $s \in S$, basta tomar $x = s + 1$. Notemos que como $s \neq -1$, entonces $x \neq 0$ y por tanto $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Además, $f(x) = f(s + 1) = (s + 1) - 1 = s$. **(0.5 ptos.)**

iii) (0.5 ptos.) Concluya que $(S, *)$ es un grupo abeliano.

Solución: Por el punto anterior, $(S, *) \cong (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ y como este último es grupo abeliano, $(S, *)$ también lo es. **(0.5 ptos.)**

b) (2.0 ptos.) Sea G un grupo. Pruebe que

$$G \text{ es abeliano} \iff \forall a, b \in G, (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

Indique las propiedades que utiliza en cada paso.

Solución: Sean $a, b \in G$.

($\Rightarrow$) Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (ab)(a^{-1}b^{-1}) &= (ba)(a^{-1}b^{-1}) && G \text{ es abeliano} \\ &= b(a(a^{-1}b^{-1})) && \text{asociatividad} \\ &= b((aa^{-1})b^{-1}) && \text{asociatividad} \\ &= b(eb^{-1}) && \text{neutro} \\ &= bb^{-1} && \text{inverso} \\ &= e && \textbf{(0.8 ptos.)} \end{aligned}$$

Como el inverso de ab es único, concluimos que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. **(0.2 ptos.)**

($\Leftarrow$) Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} (ba)(ab)^{-1} &= (ba)(a^{-1}b^{-1}) && \text{hipótesis} \\ &= b(a(a^{-1}b^{-1})) && \text{asociatividad} \\ &= b((aa^{-1})b^{-1}) && \text{asociatividad} \\ &= b(eb^{-1}) && \text{neutro} \\ &= bb^{-1} && \text{inverso} \\ &= e && \textbf{(0.8 ptos.)} \end{aligned}$$

Nuevamente, como el inverso de $(ab)^{-1}$ es único, concluimos que $ba = ab$. **(0.2 ptos.)**

P3. Considere el anillo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$, donde $\oplus$ y $\otimes$ corresponden a la suma y la multiplicación usual de un producto cartesiano.

a) (1.0 pto.) Encuentre dos elementos invertibles de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \otimes)$.

Solución: Dos elementos invertibles son $([1]_2, [1]_5)$ y $([1]_2, [2]_5)$. Sus inversos son $([1]_2, [1]_5)^{-1} = ([1]_2, [1]_5)$ y $([1]_2, [2]_5)^{-1} = ([1]_2, [3]_5)$. **(1.0 pto.)**

b) (1.0 pto.) ¿Este anillo tiene divisores de cero? En caso afirmativo, encuentre dos divisores.

Solución: El anillo sí tiene divisores de cero **(0.2 ptos.)**. Por ejemplo, $([0]_2, [1]_5)$ y $([1]_2, [0]_5)$ lo son. **(0.8 ptos.)**

- c) Sea $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ un función definida como $f([a]_2, [b]_5) = [5a + 2b]_{10}$, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.
i) (1.5 ptos.) Pruebe que f está bien definida, es decir, que si $[a]_2 = [c]_2$ y $[b]_5 = [d]_5$, entonces $f([a]_2, [b]_5) = f([c]_2, [d]_5)$.

Solución: Sean $([a]_2, [b]_5)$ y $([c]_2, [d]_5)$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ tales que $[a]_2 = [c]_2$ y $[b]_5 = [d]_5$. Luego, existen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tales que $a - c = 2k$ y $b - d = 5\ell$ **(0.5 ptos.)**. Por tanto:

$$\begin{aligned} f([a]_2, [b]_5) &= [5a + 2b]_{10} \\ &= [5(c + 2k) + 2(d + 5\ell)]_{10} \\ &= [5c + 2d + 10(k + \ell)]_{10} \\ &= [5c + 2d]_{10} \\ &= f([c]_2, [d]_5) \quad \textbf{(1.0 pto.)} \end{aligned}$$

- ii) (1.5 ptos.) Pruebe que f un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \oplus)$ a $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$.

Solución: Sean $([a]_2, [b]_5)$ y $([c]_2, [d]_5)$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$. Tenemos que demostrar que:

$$f([a]_2, [b]_5 \oplus [c]_2, [d]_5) = f([a]_2, [b]_5) +_{10} f([c]_2, [d]_5). \quad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

Para ello, notemos que:

$$\begin{aligned} f([a]_2, [b]_5 \oplus [c]_2, [d]_5) &= f([a]_2 +_2 [c]_2, [b]_5 +_5 [d]_5) \\ &= f([a + c]_2, [b + d]_5) \quad \textbf{(0.3 ptos.)} \\ &= [5(a + c) + 2(b + d)]_{10} \\ &= [(5a + 10b) + (5c + 2d)]_{10} \quad \textbf{(0.4 ptos.)} \\ &= [5a + 2b]_{10} +_{10} [5c + 2d]_{10} \\ &= f([a]_2, [b]_5) +_{10} f([c]_2, [d]_5) \quad \textbf{(0.3 ptos.)} \end{aligned}$$

- iii) (1.0 pto.) Argumente por qué f no es homomorfismo de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \otimes)$ a $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot_{10})$.

Solución: Para mostrar que no es homomorfismo, basta encontrar $([a]_2, [b]_5)$ y $([c]_2, [d]_5)$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ tales que:

$$f([a]_2, [b]_5 \otimes [c]_2, [d]_5) \neq f([a]_2, [b]_5) \cdot_{10} f([c]_2, [d]_5). \quad \textbf{(0.3 ptos.)}$$

Para ello, tomemos $([a]_2, [b]_5) = ([c]_2, [d]_5) = ([0]_2, [1]_5)$. En efecto:

$$f([0]_2, [1]_5 \otimes [0]_2, [1]_5) \neq f([0]_2, [1]_5) = [2]_{10}. \quad \textbf{(0.2 ptos.)}$$

Por otro lado,

$$f([0]_2, [1]_5) \cdot_{10} f([0]_2, [1]_5) = [2]_{10} [2]_{10} = [4]_{10} \quad \textbf{(0.3 ptos.)}$$

Como $[2]_{10} \neq [4]_{10}$, f no es homomorfismo de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \otimes)$ a $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot_{10})$. **(0.2 ptos.)**

Duración: 3 horas.