Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2025.

CONTROL 3

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la(s) hipóotesis.

P1. Sea $h : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$,

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ \dfrac{-n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Indicación: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

a) (2 ptos.) Demuestre que h es biyectiva.

Solución:
Antes de probar la biyectividad, estudiaremos qué hace exactamente la funciń h:

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ es un número par, entonces $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}^*$, con lo cuál $h(2k) = k$. De esta manera, obtenemos que la imagen de los números pares son los enteros positivos.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ es un número impar, entonces $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}^*$, con lo cuál $h(2k+1) = -k$. De esta manera, obtenemos que la imagen de los números impares son los enteros negativos.
- $h(1) = 0$.

De esta manera, estudiemos la biyectividad, analizando la inyectividad y epiyectividad de la función por separado.

1) **[Inyectividad]:** Debemos probar que $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, h(n_1) = h(n_2) \Longrightarrow n_1 = n_2$. **(+0.2 por definición)** Supongamos que $h(n_1) = h(n_2)$, y estudiemos los casos según la paridad de n_1 y n_2.
   - Si n_1 y n_2 son pares. Entonces:

   $$\begin{aligned} h(n_1) = h(n_2) &\Longrightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \\ &\Longrightarrow n_1 = n_2 \end{aligned}$$

   (+0.2 por caso pares)
   - Si n_1 y n_2 son impares. Entonces:

   $$\begin{aligned} h(n_1) = h(n_2) &\Longrightarrow \frac{-n_1+1}{2} = \frac{-n_2+1}{2} \\ &\Longrightarrow -n_1 + 1 = -n_2 + 1 \\ &\Longrightarrow -n_1 = -n_2 \\ &\Longrightarrow n_1 = n_2 \end{aligned}$$

   (+0.2 por caso impares)

- Si n_1 y n_2 tienen distinta paridad. Sin pérdida de generalidad, supongamos que n_1 es par y n_2 es impar. Luego:

$$\begin{aligned} h(n_1) = h(n_2) &\implies \frac{n_1}{2} = \frac{-n_2+1}{2} \\ &\implies n_1 = -n_2 + 1 \end{aligned}$$

  Lo cuál es una contradicción pues $n_1 > 0$, y $-n_2 + 1 \leq 0$. De esta manera, este caso no puede ocurrir. **(+0.2 por caso distinta paridad)**

Por lo tanto, h es inyectiva. **(+0.1 por conclusión)**

2) **[Epiyectividad]:** Debemos probar que $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}^*, h(n) = z$ **(+0.2 por definición)**. Estudiemos por caso:

- Si $z > 0$, basta tomar $n = 2z$, pues es un número par y $n \in \mathbb{N}^*$. De esa manera:

$$h(n) = h(2z) = \frac{2z}{2} = z$$

  (+0.2 por caso positivo)

- Si $z < 0$, basta tomar $n = -2z + 1$, pues corresponde a un número impar y $n \in \mathbb{N}^*$. De esa manera:

$$h(n) = h(2z+1) = \frac{-(-2z+1)+1}{2} = \frac{2z}{2} = z$$

  (+0.2 por caso negativo)

- Si $z = 0$, basta con tomar $n = 1$, pues $h(1) = \frac{-1+1}{2} = 0$. **(+0.2 por caso cero)**

Con lo anterior, $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}^*, f(n) = z$. Con esto concluímos que $\mathbb{Z} = Im(h)$, por lo que h es epiyectiva. **(+0.1 por conclusión)**

Como h es inyectiva y epiyectiva, entonces es biyectiva. **(+0.2 por conclusión)**

Indicaciones para la corrección:

- Si demuestra biyectividad calculando la función inversa y corroborando que efectivamente es (como en la parte (b)) asignar puntaje completo.
- Si no escribe explícitamente la definición de inyectividad y/o epiyectividad, pero muestra el manejo del concepto, asignar el puntaje.

b) (2 ptos.) Calcule la inversa.

Solución:
Dado que h es biyectiva existe su inversa. Por la definición de h debemos calcularla por trozos. Sea $h^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^*$, luego, basados en la parte anterior:

$$h^{-1}(z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z > 0, \\ \\ -2z + 1 & \text{si } z \leq 0. \end{cases}$$

(+1 por inversa)
Para ver que efectivamente es la inversa estudiamos la composición por ambos lados. Así, para $h^{-1} \circ h$, usamos que $\frac{n}{2} > 0$ y $\frac{-n+1}{2} \leq 0$, con lo cuál:

$$\begin{aligned} h^{-1}(h(n)) &= \begin{cases} 2\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ -2(\dfrac{-n+1}{2}) + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\ &= \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto $h^{-1} \circ h = Id_{\mathbb{N}^*}$. **(+0.5 por estudiar $h^{-1} \circ h$)**

Para $h \circ h^{-1}$, usamos que $2z$ es par y $-2z + 1$ es impar, con lo cuál:

$$\begin{aligned} h(h^{-1}(z)) &= \begin{cases} \dfrac{2z}{2} & \text{si } z > 0 \\ \\ \dfrac{-(-2z + 1) + 1}{2} & \text{,si } z \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} z & \text{si } z > 0 \\ \\ z & \text{si } z \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto $h \circ h^{-1} = Id_{\mathbb{Z}}$. **(+0.5 por estudiar $h \circ h^{-1}$)**

Indicaciones para la corrección:

- Si hace el desarrollo en la parte *a*) y sólo lo menciona, dar puntaje completo.

c) (2 ptos.) Calcule la preimagen $h^{-1}(P)$. Donde $P \subset \mathbb{Z}$ es el conjunto de los números pares, tenga en cuenta tanto los positivos como los negativos.

Solución:

Primera Forma:

Calculemos $h^{-1}(P)$, con P el conjunto de los números pares. Recordemos que:

$$h^{-1}(P) = \{n \in \mathbb{N}^* : h(n) \in P\}$$

(+0.3 por definir $h^{-1}(P)$)

Luego, si $h(n) \in P$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h(n) = 2k$ **(+0.2 por decir que $h(n)$ cumple lo anterior)**. Separemos en casos la paridad de n:

- Si n es par. Entonces $h(n) = \frac{n}{2}$, con lo cuál:

  $$\frac{n}{2} = 2k \Longrightarrow n = 4k$$

  Por lo que n corresponde a los múltiplos de 4.
  (+0.5 por caso n par)

- Si n es impar. Entonces $h(n) = \frac{-n+1}{2}$, con lo cuál:

  $$\begin{aligned} \frac{-n+1}{2} = 2k &\Longrightarrow -n + 1 = 4k \\ &\Longrightarrow -n = 4k - 1 \\ &\Longrightarrow n = 1 - 4k \end{aligned}$$

  (+0.5 por caso n impar)

De esta manera:

$$h^{-1}(P) = \{4k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 - 4k : k \in \mathbb{Z}\}$$

(+0.5 por resultado)

Segunda Forma:

Calculemos $h^{-1}(P)$, con P el conjunto de los números pares, utilizando la función inversa. Recordemos que:

$$h^{-1}(P) = \{n \in \mathbb{N}^* : \exists z \in P, h^{-1}(z) = n\}$$

(+0.3 por definir $h^{-1}(P)$)

Luego, si $z \in P$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2k$ **(+0.2 por decir que z cumple lo anterior)**. Separemos en casos según el signo de z:

- Si $z > 0$. Entonces $h^{-1}(z) = 2z$, con lo cuál:

  $$n = h^{-1}(z) = 2z = 4k \Longrightarrow n = 4k$$

  Por lo que n corresponde a los múltiplos de 4.
  (+0.5 por caso $z > 0$)

- Si $z \leq 0$. Entonces $h^{-1}(z) = -2z + 1$, con lo cuál:

$$n = h^{-1}(z) = -2z + 1 = -2 \cdot (2k) + 1 = -4k + 1 = 1 - 4k \Longrightarrow n = 1 - 4k$$

  (+0.5 por caso $z \leq 0$)

De esta manera:
$$h^{-1}(P) = \{4k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 - 4k : k \in \mathbb{Z}\}$$

(+0.5 por resultado)

P2. Sea E conjunto de referencia, $B \subseteq E$, definimos la función:

$$\begin{aligned} g_B : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longrightarrow X \setminus B \end{aligned}$$

Demuestre que:

a) (3 ptos.) g_B es biyectiva $\Leftrightarrow B = \emptyset$

Solución:

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que $B = \emptyset$. Reescribiendo la funcion:

$$g_\emptyset(X) = X \setminus \emptyset = X = Id_{\mathcal{P}(E)}$$

La cual es conocidamente biyectiva. **(+1 por esta implicancia)**

$\boxed{\Longrightarrow}$

Primera Forma

Supongamos que g_B es biyectiva.

1) En particular es epiyectiva, con lo cuál existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $g_B(X) = E$. **(+0.5)** Si $B \neq \emptyset$, entonces existe $b \in B$, y como $B \subseteq E$, entonces $b \in E$. **(+0.5)** Luego:

$$b \notin X \setminus B \Longrightarrow b \notin g_B(X) \Longrightarrow b \notin E$$

(+0.5)
Lo cuál es una contradicción pues $b \in E$. Por lo tanto $B = \emptyset$.**(+0.5)**

2) En particular es inyectiva. Luego, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se cumple que si $g_B(X) = g_B(Y)$, entonces $X = Y$. **(+0.5)** Si consideramos $X = B$ e $Y = \emptyset$ **(+0.5)**, entonces:

$$g_B(B) = B \setminus B = \emptyset = \emptyset \setminus B = g_B(\emptyset)$$

(+0.5)
Por lo tanto $B = \emptyset$. **(+0.5)**

Segunda Forma

Por contrarrecíproca. Supongamos que $B \neq \emptyset$ y demostremos que g_B no es biyectiva.

1) **[Inyectividad]:** Sea $x \in B$. Consideremos los conjuntos:

$$X = \{x\} \quad \& \quad Y = \{x, b\}$$

con $b \in B \setminus \{x\}$. **(+0.5)** Luego:

$$g_B(X) = X \setminus B = \emptyset = Y \setminus B = g_B(Y)$$

(+0.5)
Por lo cuál:

$$g_B(X) = g_B(Y) = \emptyset \text{ pero } X \neq Y$$

(+0.5)
Por lo que no es inyectiva. **(+0.5)**

2) **[Epiyectividad]:** Para este caso, basta tomar $Z \subseteq E$ tal que $Z \cap B \neq \emptyset$. **(+0.5)** Luego, no existe X tal que $g_B(X) = Z$ **(+0.5)**, pues $g_B(X)$ no tiene elementos en B, y Z si los tiene.**(+0.5)** Por lo tanto, la función no es epiyectiva. **(+0.5)**

Indicaciones para la corrección:

- Para probar la implicancia a la derecha y obtener puntaje completo, basta con ver 1) o 2) de la Primera Forma, o 1) o 2) de la Segunda Forma.

b) (1,5 ptos.) $g_A \circ g_B = g_{A\cup B}$

Solución:
Calculamos directamente la composición de funciones. Sea $X \in \mathcal{P}(A)$:

$$\begin{aligned}
(g_A \circ g_B)(X) = g_A(g_B(X)) &= g_A(X \setminus B) \\
&= (X \setminus B) \setminus A && \textbf{(+0.2)} \\
&= (X \cap B^c) \cap A^c && \textbf{(+0.3)} \\
&= X \cap B^c \cap A^c && \textbf{(+0.2)} \\
&= X \cap (A^c \cap B^c) && \textbf{(+0.3)} \\
&= X \cap (A \cup B)^c && \textbf{(+0.2)} \\
&= X \setminus (A \cup B) && \textbf{(+0.2)} \\
&= g_{A\cup B}(X) && \textbf{(+0.1)}
\end{aligned}$$

Y como $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $(g_A \circ g_B)(X) = g_{A\cup B}(X)$, concluimos que: $g_A \circ g_B = g_{A\cup B}$

c) (1,5 ptos.) $g_B^{-1}(\emptyset) = \mathcal{P}(B)$

Solución: Procedemos por doble inclusión:
$\boxed{\subseteq}$ $g_B^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq \mathcal{P}(B)$:
Sea $X \in g_B^{-1}(\{\emptyset\})$, luego:

$$\begin{aligned}
X \in g_B^{-1}(\{\emptyset\}) &\implies g_B(X) \in \{\emptyset\} && \textbf{(+0.2)} \\
&\implies g_B(X) = \emptyset && \textbf{(+0.2)} \\
&\implies X \setminus B = \emptyset && \textbf{(+0.2)} \\
&\implies X \subseteq B && \textbf{(+0.2)} \\
&\implies X \in \mathcal{P}(B) && \textbf{(+0.2)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\supseteq}$ $g_B^{-1}(\{\emptyset\}) \supseteq \mathcal{P}(B)$:

Sea $X \in \mathcal{P}(B)$, luego:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(B) &\implies X \subseteq B \\ &\implies X \setminus B = \emptyset && \textbf{(+0.25)} \\ &\implies g_B(X) = \emptyset \\ &\implies g_B(X) \in \{\emptyset\} \\ &\implies X \in g_B^{-1}(\{\emptyset\}) && \textbf{(+0.25)} \end{aligned}$$

Luego los conjuntos son iguales por doble inclusión.

Indicaciones para la corrección:

- Puede realizarse por equivalencias de forma directa. En tal caso, asignar puntaje completo.
- Si en lugar de usar $\{\emptyset\}$, utiliza $\emptyset$, pero los pasos son correctos (y análogos), dar puntaje completo.

TIEMPO: 1 hora y 15 minutos.
No olvidar anotar su nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.