



Control 3

P1. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función definida por $f(n) = n/2$ si n es par, y $f(n) = n - 1$ si n es impar.

a) **(2 ptos.)** Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(\{0, 1, \dots, n\}) \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$.

Solución:

(Primera forma): Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se observa que $0 \leq f(k) \leq k$. **(0.4 puntos)** Luego, para todo $k \leq n$, $0 \leq f(k) \leq k \leq n$. Es decir, $f(k) \in \{0, 1, \dots, n\}$ **(0.6 puntos)**.

Pero, entonces $f(\{0, 1, \dots, n\}) = \{f(0), f(1), \dots, f(n)\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ **(1 punto)**.

(Segunda forma): Por inducción en n .

Para $n = 0$ se tiene que $f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{0\} \subseteq \{0\}$ **(0.4 puntos)**.

Para $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(\{0, 1, \dots, n\}) &= f(\{0, 1, \dots, n-1\} \cup \{n\}) \\ &= f(\{0, 1, \dots, n-1\}) \cup f(\{n\}) \\ &= f(\{0, 1, \dots, n-1\}) \cup \{f(n)\} \\ &\subseteq \{0, 1, \dots, n-1\} \cup \{f(n)\} \quad \textbf{(0.4 puntos)} \end{aligned}$$

Pero $f(n) \leq n$ **(0.4 puntos)**, luego $f(n) \in \{0, 1, \dots, n\}$ **(0.4 puntos)**

Sigue que,

$$f(\{0, 1, \dots, n\}) \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\} \cup \{0, 1, \dots, n\} = \{0, 1, \dots, n\}. \quad \textbf{(0.4 puntos)}$$

b) **(2 ptos.)** Para cada número IMPAR $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $f^{-1}(\{n\}) = \{2n\}$.

Solución: (primera forma) Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar y sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} m \in f^{-1}(\{n\}) &\iff f(m) = n \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge f(m) = n) \vee (m \text{ es impar} \wedge f(m) = n) \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge m/2 = n) \vee (m \text{ es impar} \wedge m - 1 = n) \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge m = 2n) \vee (m \text{ es impar} \wedge m = n + 1) \quad \textbf{(1 punto)} \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge m = 2n) \quad \textbf{(0.5 puntos)} \\ &\iff m = 2n \quad \textbf{(0.5 puntos)} \end{aligned}$$

donde la penúltima equivalencia se tiene pues como n es impar, $n + 1$ es par y luego $(m \text{ es impar} \wedge m = n + 1)$ es falso.

(Segunda forma). Separando por inclusión.

Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Como $2n$ es par se tiene $f(2n) = n$, y luego $2n \in f^{-1}(\{n\})$. Se concluye que $\{2n\} \subseteq f^{-1}(\{n\})$ **(1 punto)**.

Por otro lado, sea $m \in f^{-1}(\{n\})$, es decir $f(m) = n$. Hay dos casos.

- Si m es par entonces $n = f(m) = m/2$ de lo que se deduce que $m = 2n$ **(0.4 puntos)**.

- Si m es impar, entonces $n = f(m) = m - 1$, de lo que se deduce que $m = n + 1$. Pero esto no es posible pues m es impar y $n + 1$ es par. Se deduce, por contradicción, que m no puede ser impar **(0.4 puntos)**

Concluimos en base a lo anterior que si $f^{-1}(\{n\}) \subseteq \{2n\}$. **(0.2 puntos)**.

c) **(2 ptos.)** Demuestre que $f^{-1}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}) = \{2n \mid n \text{ es un número natural impar}\}$.

Solución:

Demostraremos la igualdad por inclusión mutua. Para ello, sea I el conjunto de los números naturales impares.

- Sea $m \in f^{-1}(I)$. Luego, existe $n \in I$ tal que $m \in f^{-1}(\{n\})$ y por la parte anterior, $m = 2n$ **(0.5 puntos)**. Se concluye que $m \in \{2n \mid n \text{ es un número natural impar}\}$ **(0.5 puntos)**
- Sea $m = 2n$ con n un número natural impar. Luego $f(m) = m/2 = n$ **(0.5 puntos)**. Es decir, $m \in f^{-1}(I)$ **(0.5 puntos)**.

Basta notar que

$$f^{-1}(I) = \bigcup_{n \in I} f^{-1}(\{n\}) \quad (0.8 \text{ puntos})$$

$$= \bigcup_{n \in I} \{2n\} \quad (0.6 \text{ puntos})$$

$$= \{2n \mid n \in I\} \quad (0.6 \text{ puntos})$$

(Tercera forma) Sea $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} m \in f^{-1}(I) &\iff f(m) \in I \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge f(m) \in I) \vee (m \text{ es impar} \wedge f(m) \in I) \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge m/2 \in I) \vee (m \text{ es impar} \wedge m - 1 \in I) & (0.5 \text{ puntos}) \\ &\iff (m \text{ es par} \wedge m/2 \in I) & (0.5 \text{ puntos}) \\ &\iff (m/2 \in I), & (0.5 \text{ puntos}) \\ &\iff \exists n \in I, (m = 2n) \\ &\iff m \in \{2n \mid n \in I\} & (0.5 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

P2. Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ definida por $(a, b)\mathcal{R}(x, y) \iff a \cdot y = b \cdot x$, para cada par de elementos $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

a) **(2 ptos.)** Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución: Hay que probar que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva. **(0.3 ptos.)**

Refleja: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ un elemento cualquiera. Entonces, como $ab = ba$, por definición de $\mathcal{R}$, $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$. **(0.5 ptos.)**

Simétrica: Sean $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ elementos cualquiera, tales que $(a, b)\mathcal{R}(x, y)$. Por definición de $\mathcal{R}$, esto significa que $ay = bx$, lo que equivale a $xb = ya$, y por lo tanto $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$. **(0.5 ptos.)**

Transitiva: Sean $(a, b), (x, y), (r, s) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ elementos cualquiera, tales que $(a, b)\mathcal{R}(x, y) \wedge (x, y)\mathcal{R}(r, s)$. Entonces $ay = bx \wedge xs = yr$. Despejando x como $x = \frac{yr}{s}$ (notar que no hay problema para dividir, todos los números son distintos de cero) de la segunda igualdad y reemplazando en la primera, resulta $ay = \frac{byr}{s}$. Finalmente, dividiendo por y y multiplicando por s a ambos lados de esta igualdad, se obtiene $as = br$, lo que por definición significa que $(a, b)\mathcal{R}(r, s)$, de donde se concluye la transitividad.

(0.7 ptos.)

b) (2 ptos.) Demuestre que para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$[(a, b)]_{\mathcal{R}} = \{(\lambda a, \lambda b) : \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

Solución: Dado un $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ cualquiera, debemos probar la igualdad de conjuntos del enunciado, lo que haremos mostrando las dos inclusiones mutuas:

- $[(a, b)]_{\mathcal{R}} \subseteq \{(\lambda a, \lambda b) : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$:

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ cualquiera, se tiene que

$$\begin{aligned} (x, y) \in [(a, b)]_{\mathcal{R}} &\iff (a, b)\mathcal{R}(x, y) \\ &\iff ay = bx \\ &\iff \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \end{aligned} \quad (0.5 \text{ ptos.})$$

Si llamamos $\lambda = \frac{x}{a} \in \mathbb{R}^*$, resulta directamente que $(x, y) = (\lambda a, \lambda b)$, y por lo tanto $(x, y) \in \{(\lambda a, \lambda b) : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$. (0.5 ptos.)

- $\{(\lambda a, \lambda b) : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \subseteq [(a, b)]_{\mathcal{R}}$:

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ cualquiera, si para $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(x, y) = (\lambda a, \lambda b)$, entonces $ay = a\lambda b = \lambda ab = xb$, de donde $(a, b)\mathcal{R}(x, y)$, y por lo tanto $(x, y) \in [(a, b)]_{\mathcal{R}}$. (1 pto.)

c) (2 ptos.) Demuestre que la función $g : \mathbb{R}^* \rightarrow (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)/\mathcal{R}$ definida por $g(x) = [(1, x)]_{\mathcal{R}}$ es epiyectiva.

Solución: Es necesario probar que dado cualquier elemento de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)/\mathcal{R}$, existirá un real no nulo tal que su imagen por la función g es dicho elemento.

Sea $[(a, b)]_{\mathcal{R}} \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)/\mathcal{R}$, donde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Queríamos que para algún $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = [(a, b)]_{\mathcal{R}}$, es decir, $[(1, x)]_{\mathcal{R}} = [(a, b)]_{\mathcal{R}}$ (0.5 ptos.).

Veamos en qué se traduce esto:

$$\begin{aligned} [(1, x)]_{\mathcal{R}} = [(a, b)]_{\mathcal{R}} &\iff (1, x)\mathcal{R}(a, b) \\ &\iff 1 \cdot b = xa \\ &\iff x = \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (1.5 \text{ ptos.})$$

Así, lo anterior muestra que $g(\frac{b}{a}) = [(a, b)]_{\mathcal{R}}$ y prueba la epiyectividad de g .

Duración: 1h y 15 minutos.