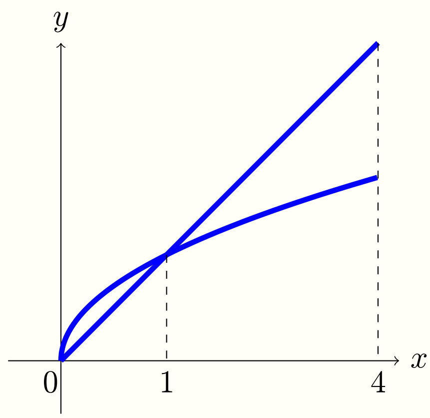
Pauta Control 3, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2021/2 (27 de Noviembre)

P.1. (a) **(3 ptos.)** Calcule el área encerrada entre las curvas $y^2 = x$ e $y = x$, entre $x = 0$ y $x = 4$. Antes de calcular, grafique las curvas en forma aproximada indicando todas las intersecciones.

Solución:



1.0

$A = A_1 + A_2$, donde

$$A_1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

1.0

$$A_2 = \int_1^4 (x - \sqrt{x})dx = \frac{16-1}{2} - 2\frac{8-1}{3} = \frac{15}{2} - \frac{14}{3} = \frac{17}{6}$$

1.0

De donde $A = 3$.

(b) Considere la función $f(x) = \dfrac{(2+x^2)^{3/2}}{3}$ donde $x \in [1, 2]$.

i) **(2 ptos.)** Calcule el largo de la curva de ecuación $y = f(x)$, donde $x \in [1, 2]$.

Solución: $f'(x) = \frac{3}{2}\dfrac{(2+x^2)^{1/2}}{3} \cdot 2x = x\sqrt{2+x^2}$. Luego $1 + f'^2(x) = 1 + 2x^2 + x^4$. De donde $\sqrt{1 + f'^2(x)} = 1 + x^2$. Es decir:

$$d\ell = (1 + x^2)dx$$

No es necesario llamar $d\ell$ al elemento de longitud, basta con calcular $\sqrt{1 + f'^2(x)} = 1 + x^2$

1.0

Así:

$$L = \int_1^2 (1 + x^2)dx = 1 + \frac{8-1}{3} = \frac{10}{3}$$

1.0

ii) **(1 pto.)** Calcule el área del manto del sólido generado por la rotación de la región bajo la curva $y = f(x)$ en torno al eje OY.

OBS: Recuerde que $A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Solución:

$$A_1^2(f) = \int_1^2 2\pi x d\ell = \int_1^2 2\pi(x + x^3)dx = 2\pi\left(\frac{4-1}{2} + \frac{16-1}{4}\right) = \frac{21}{2}\pi.$$

1.0

P.2. (a) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias

i) **(2 ptos.)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3}dx$ ii) **(2 ptos.)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}\,(2x+3)}dx$

Solución: i) Es impropia cuando $x \to \infty$ (primera especie)

Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, para x suficientemente grande se puede hacer el siguiente acotamiento:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^3} = \frac{\ln(x)}{x \cdot x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

por criterio de comparación, la integral impropia es convergente igual que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$.

2.0

OBS: También los 2 puntos se pueden obtener usando la definición e integrar por partes:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3}dx = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^3}dt$$

0.5

por partes: $u = \ln(t)$, $u' = \frac{1}{t}$; $v' = t^{-3}$, $v = -\frac{1}{2}t^{-2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(t)}{2t^2}\right)\Big|_x^1 + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t^3}dt$$

1.0

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{\ln(x)}{2x^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{t^2}\Big|_1^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{\ln(x)}{2x^2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}$$

0.5

ii) Es impropia cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to 0^+$ (tercera especie = primera especie+segunda especie).

Cuando $x \to 0^+$, se tiene que $\dfrac{e^{-x}}{2x+3} \to \frac{1}{3}$ por lo tanto por criterio de comparación por cuociente, con $g(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$, la integral impropia $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)}dx$ es convergente igual que $\displaystyle\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^{1/3}}dx$.

1.0

Cuando $x \to +\infty$, se tiene que $\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} \leq \frac{1}{x^{4/3}}$ por lo tanto por criterio de comparación, con $g(x) = \frac{1}{x^{4/3}}$, la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)}dx$ es convergente igual que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}dx$.

1.0

(b) **(2 ptos.)** Sea R la región encerrada entre el eje OX y la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ con $0 \leq x < 1$.

Escriba la integral impropia que permite calcular el volumen del sólido obtenido por la rotación de R en torno al eje OX. Estudie la convergencia de dicha integral.

Solución: Para calcular el volumen se debe estudiar la integral:

$$V_{OX} = \int_0^{1^-} \frac{\pi x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

0.5

Cuando $x \to 1^-$ basta comparar la integral anterior, con la integral de la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ya que:

0.5

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\pi x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\pi x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \in (0, \infty)$$

0.5

Por lo tanto la integral V_{OX} es convergente igual que $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$.

0.5

OBS: También los últimos 1.5 ptos se pueden obtener haciendo el cambio de variables $x = \operatorname{sen}(\varphi)$

$$\int_0^{1^-} \frac{\pi x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi \operatorname{sen}^2(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi}{\cos(\varphi)}$$

1.0

$$= \int_0^{\pi/2} \pi \operatorname{sen}^2(\varphi) d\varphi = \pi \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

Fórmula conocida $= \dfrac{1}{2} \cdot L$

0.5

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

Para consultas o comentarios de corrección, escribir a: Jorge San Martín ⟨jorge@dim.uchile.cl⟩