



Control 2 Recuperativo

P1. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre $\mathbb{Z}^3$ de la siguiente forma:

$$(a, b, c)\mathcal{R}(x, y, z) \iff (a^2, b - c) = (x^2, y - z).$$

a) (1 pto.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución: Demostraremos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia verificando que satisface las tres propiedades.

Reflexividad: Queremos verificar si $(a, b, c)\mathcal{R}(a, b, c)$, es decir, que se cumple que

$$(a^2, b - c) = (a^2, b - c).$$

Esto es cierto. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es reflexiva. **(0.2 ptos.)**

Simetría: Sean $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tales que

$$(a, b, c)\mathcal{R}(x, y, z) \iff (a^2, b - c) = (x^2, y - z) \iff (x^2, y - z) = (a^2, b - c) \iff (x, y, z)\mathcal{R}(a, b, c).$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es simétrica. **(0.2 ptos.)**

Transitividad: Sean $(a, b, c), (d, e, f), (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, con $(a, b, c)\mathcal{R}(d, e, f)$ y $(d, e, f)\mathcal{R}(x, y, z)$. Sabemos que:

$$(a^2, b - c) = (d^2, e - f) \wedge (d^2, e - f) = (x^2, y - z)$$

por lo que

$$(a^2, b - c) = (d^2, e - f) = (x^2, y - z)$$

Con esto, hemos verificado que $(m, n)\mathcal{R}(p, q)$, y por lo tanto, $\mathcal{R}$ es transitiva. **(0.3 pto.)**

Como $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia. **(0.3 ptos.)**

b) (1.5 pto.) Describa los elementos de la clase de equivalencia $[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}$. ¿Esta clase contiene a $(3, 2, 1)$?

Solución: Tenemos:

$$[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}} = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : (a^2, b - c) = (1^2, 2 - 3)\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : (a^2, b - c) = (1, -1)\},$$

es decir,

$$[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}} = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a \in \{-1, 1\} \wedge b = c - 1\}$$

o bien

$$[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}} = \{(a, b, b + 1) : a \in \{-1, 1\} \wedge b \in \mathbb{Z}\},$$

se aceptan también otras variaciones de esta descripción (**1 pto**).

El elemento $(3, 2, 1)$ no pertenece a $[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}$ porque $3 \notin \{-1, 1\}$ (alternativamente, porque $3^2 \neq 1^2$, porque $2 - 1 \neq 2 - 3$ o argumentos parecidos (**0.5 pto**)).

c) (1.5 ptos.) Determine el cardinal de $[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}$.

Solución: Primero, como $[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}} \subseteq \mathbb{Z}^3$, se tiene que $|[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}| \leq |\mathbb{Z}^3|$ (**0.4 pto**). Como $|\mathbb{Z}^3| = |\mathbb{N}|$ sigue que $|[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}| \leq |\mathbb{N}|$ (**0.3 pto**). Por el otro lado, tenemos $|\mathbb{N}| \leq |[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}|$ porque $f : \mathbb{N} \rightarrow [(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}$, $f(n) = (1, n, n + 1)$ es una función inyectiva: Si $f(n) = f(m)$ entonces $(1, n, n + 1) = (1, m, m + 1)$ por lo que $n = m$ (**0.6 pto**). Esto implica que $|[(1, 2, 3)]_{\mathcal{R}}| = |\mathbb{N}|$ (**0.2 pto**).

d) (2 ptos.) Muestre que $\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}$ es numerable.

Hint: Esto se puede probar separando en dos afirmaciones: $|\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}| \leq |\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}|$.

Solución:

Probamos primero $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}|$. Para esto consideramos la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^3/\mathcal{R}$ dada por $f(n) = [(n, 0, 0)]_{\mathcal{R}}$. Se tiene que f es inyectiva porque $f(n) = f(m)$ implica que $[(n, 0, 0)]_{\mathcal{R}} = [(m, 0, 0)]_{\mathcal{R}}$, lo que implica que $n^2 = m^2$ que significa que $n = m$ porque ambos son naturales (**0.6 pto**). Por lo tanto $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}|$ (**0.4 pto**).

Ahora probamos $|\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}| \leq |\mathbb{N}|$. Para esto, consideramos la función $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3/\mathcal{R}$ dada por $f(a, b, c) = [(a, b, c)]_{\mathcal{R}}$. La función f es epiyectiva (porque las clases de equivalencia partitionan el conjunto sobre el cual la relación de equivalencia está definida) (**0.3 pto**). Por lo tanto, $|\mathbb{Z}^3/\mathcal{R}| = |f(\mathbb{Z}^3)| \leq |\mathbb{Z}^3| = |\mathbb{N}|$ (**0.5 pto**), donde la desigualdad se tiene por una propiedad del apunte (**0.2 pto**).

P2. a) (2 ptos) En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{Q}$ de la siguiente forma:

$$(a, b)\mathcal{Q}(c, d) \Leftrightarrow [a \leq c \wedge b = d].$$

Muestre que $\mathcal{Q}$ es una relación de orden. ¿Es orden total?

Solución: Demostraremos que $\mathcal{Q}$ es una relación de equivalencia verificando que satisface las tres propiedades.

Reflexividad: Queremos verificar $(a, b)\mathcal{Q}(a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, es decir, que se cumple que

$$a \leq a \wedge b = b.$$

Esto es cierto. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es refleja. (**0.2 ptos**.)

Antisimetría: Sean $(a, b), (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tales que

$$(a, b)\mathcal{Q}(x, y) \wedge (x, y)\mathcal{Q}(a, b)$$

Esto se tiene si y solamente si

$$\left[(a \leq x \wedge b = y) \wedge (x \leq a \wedge y = b) \right] \iff \left[a = x \wedge b = y \right] \iff (a, b) = (x, y).$$

Por lo tanto, $\mathcal{Q}$ es antisimétrica. **(0.4 ptos.)**

Transitividad: Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}^2$, con $(a, b)\mathcal{Q}(c, d)$ y $(c, d)\mathcal{Q}(e, f)$. Sabemos que:

$$\left[(a \leq c \wedge b = d) \wedge (c \leq e \wedge d = f) \right] \iff \left[a \leq e \wedge b = f \right] \iff (a, b)\mathcal{Q}(e, f)$$

por lo que $\mathcal{Q}$ es transitiva. **(0.4 pto.)**

Como $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva, por lo que es una relación de orden **(0.3 ptos)**. No es orden total, porque por ejemplo, los elementos $(1, 1)$ y $(1, 2)$ no son comparables **(0.4 ptos** por encontrar a un par no comparable), lo que se justifica como sigue: $(1, 1)\mathcal{Q}(1, 2)$ no se tiene porque $1 \neq 2$ y $(1, 2)\mathcal{Q}(1, 1)$ no se tiene porque $2 \neq 1$ **(0.3 ptos** por justificar).

b) (2 ptos) Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule

$$\sum_{k=0}^n \frac{k!(k^2 + k + 1)}{n + 1}.$$

Solución:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k!(k^2 + k + 1)}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n k!(k^2 + k + 1) \text{ **(0.1 pto)**}$$

Además,

$$k^2 + k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k = (k + 1)^2 - k \text{ **(0.2 pto)**}$$

por lo que

$$\sum_{k=0}^n k!(k^2 + k + 1) = \sum_{k=0}^n k!((k + 1)^2 - k) = \sum_{k=0}^n ((k + 1)^2 k! - k \cdot k!) = \sum_{k=0}^n ((k + 1) \cdot (k + 1)! - k \cdot k!) \text{ **(0.7 pto)**}$$

Por la propiedad telescópica, tenemos

$$\sum_{k=0}^n k!(k^2 + k + 1) = \sum_{k=0}^n ((k + 1) \cdot (k + 1)! - k \cdot k!) = (n + 1) \cdot (n + 1)! - 0 \cdot 0! \text{ **(0.7 pto)**}$$

Observamos que

$$(n + 1) \cdot (n + 1)! - 0 \cdot 0! = (n + 1) \cdot (n + 1)! \text{ **(0.1 pto)**}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k!(k^2 + k + 1)}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} ((n + 1) \cdot (n + 1)!) = (n + 1)! \text{ **(0.2 pto)**}$$

c) (2 ptos.) En la expansión de $(1 + x)^{11}$, encuentre el coeficiente de x^7 . Justifique.

Solución: Por el Teorema Binomial (o Teorema de Newton), se tiene que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ **(0.5 pto)**. Por lo tanto,

$$(1 + x)^{11} = (x + 1)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^k 1^{11-k} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^k \text{ (0.5 pto)}$$

Entonces, el coeficiente de x^7 es $\binom{11}{7} = \frac{11!}{7!(11-7)!} = \frac{11!}{7! \cdot 4!}$ **(0.5 pto)**. Calculamos

$$\binom{11}{7} = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330 \text{ (0.5 pto)}$$

- P3.** a) (2 ptos) Use la identidad de Pascal para probar que para todo $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k \geq 2$ se tiene que

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Solución: La identidad de Pascal es

$$\binom{m+1}{\ell+1} = \binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell+1} \text{ (0.5 pto)}.$$

Aplicando esta fórmula con $m = n + 1$ y $\ell = k - 1$, se obtiene

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} \text{ (0.4 pto)}.$$

Aplicando la identidad de Pascal de nuevo, esta vez con $m = n$ y $\ell = k - 2$, se obtiene

$$\binom{n+1}{k-1} = \binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1}. \text{ (0.4 pto)}.$$

Aplicando la identidad de Pascal de nuevo, esta vez con $m = n$ y $\ell = k - 1$, se obtiene

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \text{ (0.4 pto)}.$$

Juntando todo obtenemos

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \text{ (0.3 pto)}.$$

- b) Se define $\mathcal{B} = \{\binom{n}{k} : n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n\}$ y para $r \in \mathbb{N}$ se define $\mathcal{B}_r = \{\binom{r}{k} : k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq r\}$. Sabemos que $\mathcal{B}$ es numerable (no hace falta mostrar esto).

- 1) (1 pto) Muestre que $|\mathcal{B}_r| \leq \frac{r}{2} + 2$.

Solución: Como $\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$ **(0.3 pto)** tenemos que

$$\mathcal{B}_r = \left\{ \binom{r}{k} : k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq r \right\} = \left\{ \binom{r}{k} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1\} \right\} \text{ (0.3 pto)}.$$

Entonces, sabemos que $f : \{0, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1\} \rightarrow \mathcal{B}_r$ dada por $f(j) = \binom{r}{j}$ es epiyectiva, por lo que $\mathcal{B}_r = f(\{0, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1\})$ tiene cardinal a lo más $|\{0, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1\}| \leq \frac{r}{2} + 2$ **(0.4 pto)**.

2) (1 pto) Determine

$$|\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{100}|.$$

Solución: Por la proposición sobre perturbaciones finitas, es decir la proposición que dice $|A \setminus B| = |A|$ si A es infinito y B es finito **((0.5 pto)** por esta justificación), y como $\mathcal{B}_{100}$ es finito por el item anterior y $\mathcal{B}$ es numerable, se concluye que $|\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{100}|$ es numerable **((0.5 pto))**.

3) (1 pto) Sea $s \in \mathbb{N}$ un natural. Determine

$$|\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i=0}^s \mathcal{B}_i|.$$

Solución: Uniones finitas de conjuntos finitos son finitas **((0.5 pto))**. Como $s \in \mathbb{N}$ y cada $\mathcal{B}_i$ es finito por la parte P3b1), y por la proposición sobre perturbaciones finitas, se concluye **((0.5 pto))**.

4) (1 pto) Determine

$$|\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i|.$$

Solución: Probamos que $|\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i| = 0$. Para esto, es suficiente probar que $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i = \emptyset$, o sea, $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$ **((0.4 pto))**. Para ver esto, sea $x \in \mathcal{B}$ arbitrario. Por la definición de $\mathcal{B}$, tenemos que $x = \binom{r}{k}$ para ciertos $r, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq r$ **((0.1 pto))**. Entonces $x \in \mathcal{B}_r$ **((0.2 pto))**. Como $\mathcal{B}_r \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, se deduce que $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, que es lo que se quería ver **((0.3 pto))**.

Duración: 3 horas.