

PAUTA P1

P1 a)

I) Para encontrar la solución de la ec. homogénea basta encontrar el polinomio característico y sus raíces

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\text{raíces } \lambda = 2$$

$$\lambda = 3$$

por lo tanto 0.5 (raíces)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{2t} \\ y_2(t) &= e^{3t} \end{aligned}$$

} si dicen que esta es la base +0.5

Son las sol. de la ec. homogénea.

Sol general de la ec. homogénea $y_h(x) = A_1 e^{2x} + A_2 e^{3x}$
si lo expresan así +0.5 pt

II) Notamos que $6x + 1$ es solución de

$$D^2 z = 0$$

+0.1

Por lo tanto

si y es sol de $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$

$\Rightarrow y$ es sol de

$$D^2(D-2)(D-3)z = 0$$

0.1 pt

sol de esa ecuación son $e^{2x}, e^{3x}, x, 1$
(si no plantea la ec. pero llega a la sol dar los 0.3 pt) 0.2 pt

Como e^{2t}, e^{3t} son sol de la ec. homogénea basta encontrar solución de la forma

$$Ax + B$$

0.2 pt

(si incluye sol ec. homogénea dar el puntaje igual)

Ajustamos A y B usando la ecuación

$$-5A + 6(Ax + B) = 6x + 1$$

$$6A = 6$$

$$-5A + 6B = 1$$

$$B = 1$$

$$y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x + 1$$

+0.1

$$A = 1$$

0.2 pt

AT AE

(a) L.C

... of

(I

$$0 = 1 + 12 - 5$$

$$0 = (2-1)(2-1)$$

(action) 2.0

$$\begin{cases} 9 = (1+1) \\ 9 = (1+1) \end{cases}$$

... ..

$$S_2 A + S_1 A = (1) \frac{1}{2}$$

... ..

$$0 = 5^2$$

$$1 + x_0 = 1 + 12 - 11$$

$$0 = 5(5-1)(5-1)^2$$

... ..

... ..

$$1 + x_0 = 1 + 12 - 11$$

... ..

$$1 + x_0 = (1 + 12 - 11)$$

$$1 = 12 + 12 - 1$$

$$1 = 12 + 12 - 1$$

$$1 = 12$$

$$1 = 12$$

III

Sol particular debe ser de la forma

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + x + 1$$

$$y(0) = A + B + 1$$

$$y'(0) = 2A + 3B + 1$$

0.5 pt

Así

$$2A + 2B + 2 = 0$$

$$2A + 3B + 1 = 0$$

$$B = 1$$

$$A = -2$$

$$y = -2e^{2x} + e^{3x} + x + 1$$

0.5 pt

2a) Powerverbraucher über den die folgende

$$A + x + \frac{x^2}{2} B + \frac{x^2}{2} A = y$$

to E.O

$$A + B + A = (0) \quad y$$

$$A + B + A = (0) \quad y$$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 + 1 + 1 \\ 0 &= 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned} \quad \text{2A}$$

$$1 = 1$$

$$1 = 1$$

to E.O

$$A + x + \frac{x^2}{2} B + \frac{x^2}{2} A = y$$

Nota: Tanto P1a)II como P1a)III
Se pueden hacer con variación de parámetros

P1 a II) $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x}$

~~III~~ $y_p(x) = -y_1(x) \int_0^x \frac{y_2(s)(6s+1)}{e^{5s}} ds + y_2(x) \int_0^x \frac{y_1(s)(6s+1)}{e^{5s}} ds$
 $= -e^{2x} \int_0^x e^{-2s}(6s+1) ds + e^{3x} \int_0^x e^{-3s}(6s+1) ds$

0.5 pt

Si se plantea con integral
indefinida está también
correcto.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-2s}(6s+1) ds &= -\frac{1}{2}(6s+1)e^{-2s} \Big|_0^x - \int_0^x \frac{e^{-2s}}{(-2)} \cdot 6 ds \\ &= -\frac{1}{2}((6x+1)e^{-2x} - e^0) + \frac{3}{(-2)} e^{-2x} \Big|_0^x \\ &= -\frac{1}{2}(6x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-3s}(6s+1) ds &= -\frac{1}{3}e^{-3s}(6s+1) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{e^{-3s}}{(-3)} \cdot 6 ds \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3x}(6x+1) + \frac{1}{3} + \frac{2}{(-3)}e^{-3x} \Big|_0^x \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3x}(6x+1) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{-3x} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Sol $y_p(x) = \frac{1}{2}(6x+1) - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}(6x+1) + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3x}$
 $= \frac{(6x+1)}{6} + \frac{5}{6} - 2e^{2x} + e^{3x}$
 $= x+1 - 2e^{2x} + e^{3x}$

0.5 pt

III) Esta y_p por construcción satisface $y(0) = y'(0) = 0$
 $y = (x+1) - 2e^{2x} + e^{3x}$

1.0 pt

Motor: Tanto P10 II como P10 III
se pueden hacer con variador de potencia

$$P10 II) \quad M(N, N) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{pmatrix} = e^{2x}$$

$$N(x) = -N'(x) \int_0^x \frac{e^{2x} (2x+1) e^{3x} + e^{2x} (2x+1) e^{3x}}{e^{2x} e^{3x}} dx$$

$$= -e^{2x} \int_0^x (2x+1) e^{3x} + e^{2x} \int_0^x (2x+1) e^{3x} dx$$

$$\boxed{0.297}$$

Si se plantea un integral
indefinida en la transformada
de Laplace

$$\int_0^x e^{2x} (2x+1) e^{3x} = -\frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \int_0^x \frac{e^{5x}}{2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10}$$

$$\int_0^x e^{2x} (2x+1) e^{3x} = -\frac{1}{3} (2x+1) e^{5x} - \int_0^x \frac{e^{5x}}{3} dx$$

$$= -\frac{1}{3} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{15} e^{5x} + \frac{1}{15} = -\frac{1}{3} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{15} e^{5x} + \frac{1}{15}$$

$$= -\frac{1}{3} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{15} e^{5x} + \frac{1}{15} = -\frac{1}{3} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{15} e^{5x} + \frac{1}{15}$$

$$N(x) = \frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10}$$

$$N(x) = \frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} (2x+1) e^{5x} - \frac{1}{10} e^{5x} + \frac{1}{10}$$

$$\boxed{0.297}$$

P1) b)

$$x = e^u$$

Veamos la ecuación que satisface
 $z(u) = y(e^u)$

0.5 pt

$$\begin{cases} z'(u) = y'(e^u) \cdot e^u = y'(x) x \\ z''(u) = y''(e^u) e^{2u} + y'(e^u) \cdot e^u = y''(x) x^2 + y'(x) x \\ z'''(u) = y'''(e^u) e^{3u} + y''(e^u) \cdot 2e^{2u} + y'(e^u) e^{2u} \\ \quad + y'(e^u) e^u = y'''(x) x^3 + 3 y''(x) x^2 + y'(x) x \end{cases}$$

$$z''(u) - z'(u) = y''(x) x^2$$

$$z'''(u) = y'''(x) x^3 + 3(z'' - z') + z' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 0.5 \text{ pt}$$

$$\begin{aligned} y'''(x) x^3 &= z''' - 3(z'' - z') - z' \\ &= z''' - 3z'' + 2z' \end{aligned}$$

Así la ecuación queda transformada a:

$$z''' - 3z'' + 2z' - (z'' - z') + z' - z = e^{3u}$$

$$z''' - 4z'' + 4z' - z = e^{3u} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 0.5 \text{ pt}$$

Error de cálculo - 0.2 pt

Polinomio característico es $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = p(\lambda)$

$\lambda = 1$ es raíz

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) - 4\lambda(\lambda - 1) = p(\lambda)$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1 - 4\lambda) = p(\lambda)$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

Sol. ec. homogénea se obtienen al factorizar
 Para eso resolvemos

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Cálculo raíces + 0.5 pt

factor exp $\theta = \dots$
 $\theta = \dots$

$$x(x)'y = \theta \cdot (x)'y = (\omega)'y$$

$$x(x)'y + x(x)'N = \theta \cdot (x)'y + \theta \cdot (x)'N = (\omega)'y + (\omega)'N$$

$$S^{(1)}\theta + \theta \cdot (x)'N = (\omega)'y + (\omega)'N$$

$$x(x)'y + x(x)'N = \theta \cdot (x)'y + \theta \cdot (x)'N$$

$$x(x)'N = (\omega)'y - (\omega)'N$$

$$\theta + (\theta - \omega)'N = (\omega)'y$$

$$\theta - (\theta - \omega)'N = (\omega)'y$$

$$\theta = \omega'$$

abw... $\theta = \omega'$

$$\theta = \omega - \theta'N + (\theta - \omega)'N = \omega + \theta'N - \omega'$$

$$\theta = \omega - \theta'N + \theta'N - \omega'$$

$$(a) \theta = 1 - \theta'N + \theta'N - \omega'$$

$$(b) \theta = (1 - \theta)N - (1 + \theta'N)(1 - \theta)$$

$$(b) \theta = (1 - \theta)N - (1 + \theta'N)(1 - \theta)$$

negativ... $\theta = 1 + \theta'N - \theta'$

$$\theta = 1 + \theta'N - \theta'$$

... $\theta = 1 + \theta'N - \theta'$

$$(D-1) \left(D - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right) \left(D - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) z = e^{3u} \quad 0.2 \text{ pt}$$

Usando coeficientes indeterminados obtenemos que la sol de esta ecuación resuelven también

$$(D-3)(D-1) \left(D - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right) \left(D - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) w = 0$$

$$w = C_1 e^{3u} + C_2 e^u + C_3 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) u} + C_4 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) u}$$

sol homogénea 0.3 pt
(si plantea la sol correcta igual dar 0.5 pt);

Solo debemos ajustar C_1 para obtener la solución particular, para eso usamos la ecuación

$$C_1 (27 e^{3u} - 4 \cdot 9 e^{3u} + 4 \cdot 3 e^{3u} - e^{3u}) = e^{3u}$$

$$C_1 (27 - 36 + 12 - 1) = 1$$

$$2C_1 = 1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

0.1 pt

Solución general es

$$z(u) = C_1 e^u + C_3 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) u} + C_4 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) u} + \frac{1}{2} e^{3u}$$

0.2 pt

o sea

$$y(x) = C_1 x + C_3 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + C_4 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{2} x^3$$

0.2 pt

definidas para $x > 0$.

tg S.O $u^E S = E \left(\left(\frac{E}{E} - S \right) - (1) \left(\left(\frac{E+1}{E} - 1 \right) (1-1) \right) \right)$

up metodo de balanceamento de massa para a derivada nos termos de massa e de energia

$$0 = W \left(\left(\frac{E}{E} - S \right) - (1) \left(\left(\frac{E+1}{E} - 1 \right) (1-1) (E-1) \right) \right)$$

$$\frac{u \left(\frac{E}{E} - S \right)}{S} + \frac{u \left(\frac{E+1}{E} - 1 \right)}{S} + \frac{u}{S} + \frac{u}{S} = W$$

tg S.O derivada de massa e de energia para a derivada nos termos de massa e de energia

metodo de balanceamento de massa e de energia para a derivada nos termos de massa e de energia

tg S.O $u^E S = \left(\frac{u}{S} - \frac{u}{S} S \cdot A + \frac{u}{S} S \cdot A - \frac{u}{S} S \cdot F \right) \cdot A$

$$I = (1 - S1 + S2 - F2) \cdot A$$

$$I = 100$$

tg S.O $\frac{u}{S} = 100$

$$\left(\frac{u}{S} \right)$$

tg S.O $u \left(\frac{E}{E} - S \right) + u \left(\frac{E+1}{E} - 1 \right) + u = (u) \cdot E$

tg S.O $X \frac{1}{S} + X \frac{E}{S} + X \frac{E+1}{S} + X \frac{1}{S} = (u) \cdot E$

derivada de massa e de energia para a derivada nos termos de massa e de energia

PAUTA P2

P2 I) Buscamos una solución de la forma
 $y_1(x) = e^{\lambda x}$ a constante.

$$x \lambda^2 e^{\lambda x} - (4x+1) \lambda e^{\lambda x} + (4x+2) e^{\lambda x} = 0$$

0.4 pt

$$\lambda^2 x - (4x+1) \lambda + 4x + 2 = 0$$

$$\lambda^2 x - 4x \lambda + 4x - \lambda + 2 = 0$$

$$x(\lambda^2 - 4\lambda + 4) + (-\lambda + 2) = 0$$

Notamos que si $\lambda = 2$ entonces $e^{\lambda x}$ es solución.

llegamos
 $\lambda = 2$

0.4 pt

0.2 pt e^{2x} es una solución de la ecuación homogénea.

II) Usamos la fórmula de Liouville para eso primero dividimos la ec. por x .
 homogénea

$$y'' - \left(\frac{4x+1}{x}\right) y' + \left(\frac{4x+2}{x}\right) y = 0$$

0.4 pt

normalizar

La fórmula de Liouville nos entrega una segunda solución:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\left(-\int \frac{4x+1}{x} dx\right)}}{y_1^2(x)} dx$$

plantear integral

0.3 pt

$$\int \frac{4x+1}{x} = 4x + \ln x$$

$$y_1(x) = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{e^{4x + \ln x}}{e^{4x}} dx = e^{2x} \int x dx = e^{2x} \frac{x^2}{2}$$

Podemos considerar

$$y_2 = e^{2x} x^2$$

0.3 pt

I) $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ with p, q, r constants

$$0 = y'' + p(x)y' + q(x)y - r(x)$$

0.5 pt
0.5 pt

$$0 = y'' + p(x)y' + q(x)y - r(x)$$

$$0 = y'' + p(x)y' + q(x)y - r(x)$$

$$0 = y'' + p(x)y' + q(x)y - r(x)$$

Notation: $y = u$ is a particular solution

II) $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ with p, q, r functions

III) $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ with p, q, r functions

0.5 pt
0.5 pt

$$0 = y'' + p(x)y' + q(x)y - r(x)$$

IV) $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ with p, q, r functions

0.5 pt
0.5 pt

$$0 = y'' + p(x)y' + q(x)y - r(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

0.5 pt

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

0.5 pt

0.5 pt

(III) Ahora que tenemos la base de soluciones, resolvemos usando el método de variación de parámetros.

$$y'' - \left(\frac{4x+1}{x}\right)y' + \left(\frac{4x+2}{x}\right)y = 2x e^x \quad \boxed{0.2 \text{ pt}}$$

normalizar

$$y_p = -e^{2x} \int \frac{x^2 e^{2x} \cdot 2x e^x}{W(y_1, y_2)} + x^2 e^{2x} \int \frac{e^{2x} \cdot 2x e^x}{W(y_1, y_2)} dx \quad \boxed{0.3 \text{ pt}}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x^2 e^{2x} \\ 2e^{2x} & 2x e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} (2x^2 + 2x - 2x^2) = 2x e^{4x} \quad \boxed{0.3 \text{ pt}}$$

$$y_p = -e^{2x} \int \frac{x^2 e^{2x} \cdot 2x e^x}{2x e^{4x}} dx + x^2 e^{2x} \int \frac{e^{2x} \cdot 2x e^x}{2x e^{4x}} dx$$

$$= -e^{2x} \int x^2 e^{-x} dx + x^2 e^{2x} \int e^{-x} dx \quad \boxed{0.4 \text{ pt}}$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - \left(\int -e^{-x} \cdot 2x dx \right)$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}$$

Errores de integración bajar 0.2

$$y_p = (x^2 + 2x + 2)e^x + x^2 e^{2x} (-e^{-x}) = (x^2 + 2x + 2 - x^2)e^x = (2x + 2)e^x \quad \boxed{0.3 \text{ pt}}$$

(expresar la sol si simplificada)

(VI)

Solución general

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x^2 e^{2x} + (2x + 2)e^x \quad \boxed{0.5 \text{ pt}}$$

annuliert, verbindet es auch mit einem π von A (II)

bestimmte die Dimension der Abbildung π bestimmt

$$(III) \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(IV) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(V) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(VI) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(VII) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(VIII) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(IX) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(X) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

$$(XI) \quad \pi \circ \pi = \pi \quad \pi \circ \pi = \pi$$

P2 b)

I) $y(x) = x^k$

$$x^2 \cdot k(k-1)x^{k-2} + x k x^{k-1} - x^k = 0$$

Es solución $\Leftrightarrow$

$$k(k-1) + k - 1 = 0$$

0.5 pt

$$k^2 - k + k - 1 = 0$$

$$k^2 - 1 = 0$$

$$k = 1 \text{ o } k = -1$$

Tenemos dos soluciones

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{x}$$

0.5 pt

(II) Para probar que estas soluciones son base tanto en $(-\infty, 0)$ como en $(0, \infty)$ basta verificar que son l.i.

$$Ax + \frac{B}{x} = 0$$

si $x \neq 0$

$$Ax^2 + B = 0$$

0.5 pt

esta función es nula en $x < 0$

o en $x > 0$

ssi los coeficientes A y B son 0

o sea $A = B = 0$ por lo que x y $\frac{1}{x}$ son l.i.

0.5 pt

Por lo tanto esta es la base de soluciones tanto en $(-\infty, 0)$ como en $(0, \infty)$.

Nota: También podría evaluar. Ejemplo

$$\begin{matrix} x=1: & A+B=0 \\ x=2: & 4A+B=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3A=0 \\ B=0 \end{matrix}$$

Son l.i. en $(0, \infty)$

1.0 pt

$$\begin{matrix} x=-1 \\ x=-2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} +A+B=0 \\ 4A+B=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3A=0 \\ B=0 \end{matrix}$$

Son l.i. en $(-\infty, 0)$

Podría evaluar en ± 1 y ± 2 directamente.

$$x = (x) \quad (I)$$

$$0 = x - x + x + x(1-x) \quad \Rightarrow \text{Row 1}$$

$$x = 0$$

$$0 = 1 - x + (1-x)x$$

$$0 = 1 - x$$

$$0 = 1 - x + x - x^2$$

$$1 = x \quad x = 1$$

Row 2

$$x = 0$$

$$x = (x) \quad \frac{1}{x} = (x)$$

and not a row? 2nd row not a row? (0,0) no row? (0,0) no row? i.e. not a row?

$$0 \neq x$$

$$0 = \frac{B}{x} + xA$$

$$x = 0$$

$$0 = \frac{B}{x} + xA$$

$0 > x$ no row? $0 < x$ no row?

0 not B, A, 2nd row?

$$x = x \quad x = x \quad x = x \quad 0 = B = A \quad \text{no row}$$

$$x = 0$$

no row? no row? (0,0) no row? (0,0) no row?

Row 3

$$x = 0$$

$$0 = B$$

$$0 = B + A$$

$$x = x$$

Row 4

PAUTA P3

P3] a)

$$z'' + \omega^2 z = F(t)$$

Como es una ecuación lineal no homogénea siempre se pueden expresar como

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + y_p$$

0.5 pt

y_p solución de la ecuación, siempre podemos tomar y_p con condiciones iniciales

$$y_p(0) = 0$$

$$y_p'(0) = 0$$

De hecho si $y_p(0) = a$
 $y_p'(0) = b$

se pueden elegir C_1 y C_2 para eliminar a y b .

$$C_1 + a = 0 \quad C_1 = -a$$

$$+ \omega C_2 + b = 0 \quad C_2 = -\frac{b}{\omega}$$

Podemos redefinir y_p por $\bar{y}_p$
 $\bar{y}_p = -a \cos \omega t - \frac{b}{\omega} \sin \omega t + y_p$ y

y así $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \bar{y}_p$

0.5 pt

cumple con que $\bar{y}_p(0) = 0$
 $\bar{y}_p'(0) = 0$

Otra forma es plantear la fórmula de variación de parámetros

1.0 pt

$$y_p(t) = -y_1(t) \int_0^t \frac{y_2(s) F(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2(t) \int_0^t \frac{y_1(s) F(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds$$

cumple con la condición deseada

$$y_1 = \cos \omega t \quad y_2 = \sin \omega t$$

29 April

$$x(t) = e^{j\omega t} + 1/5$$

(b) 1/5

average of several instances of $x(t)$ and $y(t)$ over a long time interval to estimate the average values of $x(t)$ and $y(t)$.

[10.10]

$$x(t) + \frac{1}{5} \cos(2\pi t) + \frac{1}{5} \cos(4\pi t) = \frac{1}{5}$$

average values of $x(t)$ and $y(t)$ over a long time interval to estimate the average values of $x(t)$ and $y(t)$.

$$0 = (0) \frac{1}{5}$$

$$0 = (0) \frac{1}{5}$$

average values of $x(t)$ and $y(t)$ over a long time interval to estimate the average values of $x(t)$ and $y(t)$.

$$x = \frac{1}{5}$$

$$0 = x + \frac{1}{5}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$0 = x + \frac{1}{5}$$

$$x(t) + \frac{1}{5} \cos(2\pi t) + \frac{1}{5} \cos(4\pi t) = \frac{1}{5}$$

[10.10]

$$x(t) + \frac{1}{5} \cos(2\pi t) + \frac{1}{5} \cos(4\pi t) = \frac{1}{5}$$

$$0 = (0) \frac{1}{5}$$

$$0 = (0) \frac{1}{5}$$

average values of $x(t)$ and $y(t)$ over a long time interval to estimate the average values of $x(t)$ and $y(t)$.

[10.10]

$$\frac{(1) \cos(2\pi t)}{(2) \cos(4\pi t)} + \frac{(1) \cos(2\pi t)}{(2) \cos(4\pi t)} = \frac{(1) \cos(2\pi t)}{(2) \cos(4\pi t)}$$

average values of $x(t)$ and $y(t)$ over a long time interval to estimate the average values of $x(t)$ and $y(t)$.

$$\frac{1}{5} \cos(2\pi t) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} \cos(4\pi t) = \frac{1}{5}$$

b) Si z tiene período $T_1 \Rightarrow z(t+T_1) = z(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow z'(t+T_1) = z'(t) \quad \forall t$ por lo tanto
evaluando en $t=0$ obtenemos

$$z(0) = z(T_1) \quad y \quad z'(0) = z'(T_1)$$

0.3 pt

Esto prueba la implicancia ($\Rightarrow$).

Problemas ($\Leftarrow$) Si $z(0) = z(T_1)$ y
 $z'(0) = z'(T_1)$

problemas que z es T_1 -periódica.

Sea $w(t) = z(t+T_1)$
 $w'(t) = z'(t+T_1)$
 $w''(t) = z''(t+T_1)$

0.2 pt

$$w''(t) + \omega^2 w(t) = z''(t+T_1) + \omega^2 z(t+T_1) = F(t+T_1) = F(t)$$

0.2 pt

ya que F tiene período T_1

$\Rightarrow w(t)$ y $z(t)$ resuelven la misma
ecuación y $w(0) = z(0)$ $w'(0) = z'(0)$
" $z(T_1)$ " $z'(T_1)$

0.2 pt

$\Rightarrow \forall t \quad w(t) = z(t)$ pero $w(t) = z(t+T_1)$
 $z(t+T_1) = w(t) \quad \forall t.$

0.1 pt

c) Para que z sol de la ecuación tenga período
 T_1 debemos probar que

$$z(0) = z(T_1) \\ z'(0) = z'(T_1)$$

Ahora por a) $z(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + y_p$

Con $y_p(0) = y_p'(0) = 0$

$$z(0) = C_1$$

$$z(T_1) = C_1 \cos \omega T_1 + C_2 \sin \omega T_1 + y_p(T_1)$$

$$C_1 = C_1 \cos \omega T_1 + C_2 \sin \omega T_1 + y_p(T_1)$$

0.2 pt

$$(T)E = (T+K)E \Leftrightarrow T \text{ is zero matrix} \quad (1) \quad (N)$$

if not all zero $K \neq 0$ $(T)E = (T+K)E \Leftrightarrow$
 constant $0 = K$ no demands

$$(NT)E = (0)E \quad \& \quad (NT)E = (0)E$$

$(\Leftarrow)$ obviously all solutions of E

$$\& \quad (NT)E = (0)E \quad \& \quad (\Rightarrow) \text{ constant}$$

$$(NT)E = (0)E$$

adding $-T$ as a constant

$$+g.B.0$$

$$(T+K)E = (T)W \quad \& \quad (T+K)E = (T)W$$

$$(T+K)E = (T)W$$

$$(T+K)E = (T)W$$

$$(T+K)E = (T)W \quad \& \quad (T+K)E = (T)W$$

$$(T+K)E = (T)W$$

T is zero matrix E as a

$$(T)E = (T)W \quad \& \quad (T)E = (T)W$$

$$(T)E = (T)W$$

$$(T)E = (T)W$$

$$+g.B.0$$

$$(NT)E$$

$$(NT)E$$

$$(T+K)E = (T)W \quad \& \quad (T+K)E = (T)W$$

$$(T+K)E = (T)W$$

adding again $-T$ as a constant E as a

$$(NT)E = (0)E$$

$$(NT)E = (0)E$$

$$(T+K)E = (T)W \quad \& \quad (T+K)E = (T)W$$

$$0 = (0)E = (0)E$$

$$(NT)E = (0)E \quad \& \quad (NT)E = (0)E$$

$$(NT)E = (0)E \quad \& \quad (NT)E = (0)E$$

$$z'(0) = C_2 \omega$$

$$z'(T_1) = -\omega C_1 \sin \omega T_1 + C_2 \omega \cos \omega T_1 + y_p'(T_1) \quad 0.2 \text{ pt}$$

$$C_2 \omega = -\omega C_1 \sin \omega T_1 + C_2 \omega \cos \omega T_1 + y_p'(T_1)$$

Escribimos esto como un sistema con C_1, C_2 incógnitas ya que $y_p'(T_1), y_p(T_1)$ se conocen si se conoce $F(t)$.

$$C_1 (\cos \omega T_1 - 1) + C_2 \sin \omega T_1 = -y_p(T_1)$$

$$-\omega C_1 \sin \omega T_1 + C_2 \omega (\cos \omega T_1 - 1) = -y_p'(T_1)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \omega T_1 - 1 & \sin \omega T_1 \\ -\omega \sin \omega T_1 & \omega (\cos \omega T_1 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p(T_1) \\ -y_p'(T_1) \end{pmatrix} \quad 0.3 \text{ pt}$$

Este sistema tiene una única solución

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\omega (\cos \omega T_1 - 1)^2 + \omega \sin^2 \omega T_1}_{\text{det de la matriz}} \neq 0 \quad 0.2 \text{ pt}$$

$$\omega \cos^2 \omega T_1 + 1\omega - 2\omega \cos \omega T_1 + \omega \sin^2 \omega T_1 \neq 0$$

$$2\omega - 2\omega \cos \omega T_1 \neq 0$$

$$2\omega (1 - \cos \omega T_1) \neq 0 \quad 0.1 \text{ pt}$$

$$\text{es decir } 1 - \cos \omega T_1 \neq 0$$

$$\text{lo que ocurre } \Leftrightarrow \omega T_1 \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1}{\frac{2\pi}{\omega}} \neq k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$w_2 = (0)^T$$

$$\text{to S.O. } (NT)q + NT\omega_2\omega_2 + T\omega_2(0)\omega_2 = (NT)^T q$$

$$(NT)q + T\omega_2\omega_2 + T\omega_2(0)\omega_2 = (0)^T$$

2, 4) now similar we can also find w_2 by using $(NT)q, (NT)^T q$ and by using

the same way

$$(NT)q = NT\omega_2\omega_2 + (1 - NT\omega_2\omega_2)(0)$$

$$(NT)q = (1 - NT\omega_2\omega_2)\omega_2 + NT\omega_2\omega_2\omega_2$$

$$\begin{pmatrix} (NT)q \\ (NT)^T q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} NT\omega_2 & 1 - NT\omega_2\omega_2 \\ (1 - NT\omega_2\omega_2)\omega_2 & NT\omega_2\omega_2 \end{pmatrix}$$

similarly we can find w_2 by using

$$0 \neq NT\omega_2\omega_2 + (1 - NT\omega_2\omega_2)\omega_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{to S.O. } \text{given at 2.7.1}$$

$$0 \neq NT\omega_2\omega_2 + NT\omega_2\omega_2 - \omega_2 + NT\omega_2\omega_2$$

$$0 \neq NT\omega_2\omega_2 - \omega_2$$

$$\text{to 1.0 } 0 \neq (NT\omega_2 - 1)\omega_2$$

$$0 \neq NT\omega_2 - 1 \quad \text{note as}$$

$$\text{to 2.7.1 } NT\omega_2 = 1 \Leftrightarrow \text{given at 2.7.1}$$

$$\text{to 2.7.1 } \omega_2 = \frac{1}{NT\omega_2} \Leftrightarrow$$

d) Si $T_1 = kT$

las soluciones

son de la forma

$$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + y_p(t)$$

No tenemos que en este caso

$z(0) = z(T_1)$ corresponde a la ecuación

0.2pt $C_1 (\cos \omega kT - 1) + C_2 \sin \omega kT = -y_p(T_1)$

y $z'(0) = z'(T_1)$ es $(T_1 = kT)$

$$-\omega C_1 \sin \omega kT + C_2 \omega (\cos \omega kT - 1) = -y_p'(T_1)$$

Como:

$$\cos \omega kT = 1$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = -y_p(T_1)$$

por lo tanto si

$$\sin \omega kT = 0 \text{ obtenemos}$$

$$-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = -y_p'(T_1) \quad 0.2pt$$

$$y_p(T_1) = 0$$

$$y_p'(T_1) = 0$$

Todas las soluciones satisfacen $z(T_1) = z(0)$
 $z'(T_1) = z'(0)$ 0.2pt

Por lo tanto son todas periódicas.

Por otra parte en este caso si $y_p(T_1) \neq 0$

o $y_p'(T_1) \neq 0$ el sistema nunca tiene

solución.

0.4 pt

e) La manera más fácil de resolver este problema es con coeficientes indeterminados

$$y'' + \omega^2 y = \cos 3\omega t$$

$$(D^2 + \omega^2) y = \cos 3\omega t$$

$$(D^2 + 9\omega^2)(D^2 + \omega^2) y = 0$$

de la forma 1.0pt $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos 3\omega t + C_4 \sin 3\omega t$

Soluciones son

$$T = T \quad \text{or} \quad (2)$$

error of 10% not sensitive to variations in

$$(T)_{qN} + \frac{1}{2} \omega_{m2} \omega + \frac{1}{2} \omega_{m2} \omega \quad \text{or} \quad (3)$$

error of 10% not sensitive to variations in

$$(T)_{qN} = (T)_{qN} = (T)_{qN} = (T)_{qN}$$

$$(T)_{qN} = T \omega_{m2} \omega + (1 - T \omega_{m2} \omega) \omega \quad \text{or} \quad (4)$$

$$(T)_{qN} = T \omega_{m2} \omega + (1 - T \omega_{m2} \omega) \omega \quad \text{or} \quad (5)$$

$$(T)_{qN} = (1 - T \omega_{m2} \omega) \omega + T \omega_{m2} \omega \omega$$

$$\begin{aligned} \text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} &= 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega \\ \text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} &= 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega \end{aligned}$$

$$(T)_{qN} = (T)_{qN} \quad \text{or} \quad (6)$$

error of 10% not sensitive to variations in

$$0 \neq (T)_{qN} \quad \text{or} \quad (7)$$

$$\text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} = 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega$$

error of 10% not sensitive to variations in

$$\text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} = 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega$$

$$\text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} = 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega$$

$$\text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} = 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega$$

$$\text{error of } 10\% \quad (T)_{qN} = 0 \omega + 0 \omega = 0 \omega$$

4) Para encontrar una solución particular basta ajustar C_4 y C_5

Pero notamos que esto no es necesario

ya que todas las funciones de la forma

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_4 \cos 3\omega t + C_5 \sin 3\omega t$$

tienen período $\frac{2\pi}{\omega}$.

1.0 pt

Por lo tanto son todas periódicas.

Nota: Si ajustan C_4 y C_5 - bajar -0.2 pt
por errores en el cálculo

Otra forma es calcular y_p y $y_p'(0) = y_p(0) = 0$

y usar lo anterior, para esto vamos

a encontrar C_4 y C_5 y luego ajustar

$$\begin{aligned} -9\omega^2 \cos 3\omega t C_4 + C_4 \omega^2 \cos 3\omega t &= \cos 3\omega t \\ -9\omega^2 \sin 3\omega t C_5 + C_5 \omega^2 \sin 3\omega t &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_5 = 0 \quad -8C_4 \omega^2 = 1$$
$$C_4 = -\frac{1}{8\omega^2}$$

$$y_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{1}{8\omega^2} \cos 3\omega t$$

$$y_p(0) = C_1 - \frac{1}{8\omega^2}$$

$$C_1 = \frac{1}{8\omega^2}$$

$$y_p'(0) = \omega C_2$$

$$C_2 = 0$$

0.8 pt

$$y_p = \frac{1}{8\omega^2} \cos \omega t - \frac{1}{8\omega^2} \cos 3\omega t. \text{ Notamos que}$$

y_p tiene período $\frac{2\pi}{\omega}$ y la sol homogénea también por lo que todo tienen período $\frac{2\pi}{\omega}$.

0.2 pt

para encontrar una solución particular
 de la ecuación

para valores de ω no resonancia

se puede tomar la función de la forma

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos 2\omega t + C_4 \sin 2\omega t$$

790.1

temperatura $\frac{\pi B}{\omega}$

Por lo tanto tomamos la función

nota: si ajustamos C_1 y C_2 no hay
 problema de errores en el cálculo
 pero 1.0 pt se pierde por no verificar

Otra forma es calcular $y(0) = y'(0) = 0$

y usar la condición de contorno y para esto vamos

a encontrar C_1 y C_2 y luego ajustar

$$-p_1 \omega^2 \cos \omega t + C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t = 0$$

$$-p_2 \omega^2 \cos 2\omega t + C_3 2\omega \sin 2\omega t + C_4 2\omega \cos 2\omega t = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0 \quad -8C_1 \omega^2 = 1$$

$$C_1 = -\frac{1}{8\omega^2}$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{1}{8\omega^2} \cos 2\omega t$$

$$y(0) = C_1 - \frac{1}{8\omega^2} = 0 \quad C_1 = \frac{1}{8\omega^2}$$

$$y'(0) = \omega C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$

$$y = \frac{1}{8\omega^2} \cos \omega t - \frac{1}{8\omega^2} \cos 2\omega t$$

se puede usar la condición de contorno y para esto vamos

temperatura $\frac{\pi B}{\omega}$ 790.1

Otra forma es usar la parte d) con $k=1$
ya que el período de $\cos 3\omega t$ tb. es $\frac{2\pi}{\omega}$

Como $y_p(0)=0$
 $y_p'(0)=0$ y y_p tiene período $\frac{2\pi}{\omega}$
(encontrando y_p)

tendremos $y_p\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=0$
 $y_p'\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=0.$

0.8 pt

Con lo que por la parte anterior
todas las soluciones tienen período $\frac{2\pi}{\omega}$

0.2 pt

7.10.1

is a constant of integration
is a constant of integration

$\frac{\pi}{2}$ is a constant of integration
 $\frac{\pi}{2}$ is a constant of integration

7.10.2

$C = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\omega}$ constant

$C = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\omega}$

7.10.3

is a constant of integration
is a constant of integration