Control 2

P1. (6.0 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$f(0,4,-1) = 25, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,4,-1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,4,-1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,4,-1) = -1.$$

Denote $\nabla f(0,4,-1) = (1,2,-1)$.

a) (2.0 ptos.) Calcule la derivada direccional de f en $(0,4,-1)$ en la dirección del vector $(1,-3,4)$.

Solución:
Primero, observamos que el vector dado $\mathbf{v} = (1,-3,4)$ **no es unitario**, por lo que debemos normalizarlo:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}, \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}\right).$$

(0.5 pts; Por calcular correctamente el módulo del vector y obtener la dirección unitaria)
Luego, aplicamos la fórmula de la derivada direccional de f en el punto $(0,4,-1)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$:

$$D_{\mathbf{u}} f(0,4,-1) = \nabla f(0,4,-1) \cdot \mathbf{u} = (1,2,-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}\right).$$

~~**(0.5 pts; Por aplicar correctamente la fórmula de la derivada direccional como producto punto)**~~ +0.5 por decir que como f es diferenciable en $(0,4,-1)$ se tiene $D_u f(0,4,-1) = \nabla f(0,4,-1) \cdot u$
Calculamos el producto escalar:

$$D_{\mathbf{u}} f(0,4,-1) = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4}{\sqrt{26}} = \frac{1-6-4}{\sqrt{26}} = \frac{-9}{\sqrt{26}}.$$

(1.0 pts; Por desarrollar correctamente el producto escalar y llegar al resultado final)

b) (2.0 ptos.) Encuentre la dirección para la cual la derivada direccional es máxima. Calcule dicha derivada direccional.

Solución:
La derivada direccional máxima de una función diferenciable en un punto se alcanza en la dirección del **gradiente unitario**, y su valor es igual a la **norma del gradiente** en ese punto.

Dirección de derivada direccional máxima:

$$\mathbf{u}_{\text{máx}} = \frac{\nabla f(0,4,-1)}{\|\nabla f(0,4,-1)\|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}.$$

(~~1.0 pts; Por identificar la dirección de máximo crecimiento como el gradiente unitario y calcularla correctamente)~~

+0.5 por decir que basta calcular $\frac{\nabla f(0,4,-1)}{\|\nabla f(0,4,-1)\|}$ porque f es diferenciable en $(0,4,-1)$
+0.5 por el resultado

Valor máximo de la derivada direccional:

$$\max_{\|\mathbf{u}\|=1} D_{\mathbf{u}}f(0,4,-1) = \|\nabla f(0,4,-1)\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}.$$

(1.0 pts; Por identificar y calcular correctamente el valor máximo como la norma del gradiente)

c) (2.0 ptos.) Encuentre el plano tangente a la superficie $f(x,y,z)=25$ en el punto $(0,4,-1)$.

Solución:
La superficie dada por

$$\{(x,y,z) : f(x,y,z)=25\}$$

es una **superficie** (o hipersuperficie).

(0.5 pts; Por identificar correctamente que se trata de una superficie

La ecuación del **plano tangente** es:

$$\nabla f(0,4,-1)\cdot\big((x,y,z)-(0,4,-1)\big)=0,$$

es decir,

$$1\cdot(x-0)+2\cdot(y-4)+(-1)\cdot(z+1)=0.$$

+0.5 por decir que la fórmula es válida pues (0,4,-1) está en la superficie

(~~1.0 pts~~; Por plantear correctamente la ecuación del plano tangente)
+0.5

Simplificando:

$$x+2y-z-9=0.$$

(0.5 pts; Por simplificar correctamente la ecuación del plano tangente y expresar el resultado final)

P2. (6.0 ptos.) Sea $f(u,v)$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, y defina

$$g(x,y)=f(ax+by,\, cx+dy),$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ son constantes dadas.

a) (3.0 ptos.) Calcule las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

Solución:
Definimos primero los cambios de variable:

$$u=ax+by, \qquad v=cx+dy.$$

(0.5 pts; Por identificar y definir correctamente las variables compuestas u y v)

Aplicamos la **regla de la cadena** para calcular las derivadas parciales de primer orden de $g(x,y)=f(u,v)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=a\,\frac{\partial f}{\partial u}+c\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=b\,\frac{\partial f}{\partial u}+d\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(0.5 pts; Por aplicar correctamente la regla de la cadena para obtener $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$)

Ahora derivamos nuevamente para obtener las derivadas segundas. Usamos la **linealidad de la derivada** y la simetría de derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.$$ +0.5 linealidad y simetría

Para la segunda derivada respecto de x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a\,\frac{\partial f}{\partial u} + c\,\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot a + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\cdot c\right) + c\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\cdot a + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot c\right) \\
&= a^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2ac\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$ +0.5 cálculo

(1.0 pts; Por derivar correctamente $\partial^2 g/\partial x^2$ usando la regla de la cadena y simetría)

↳ (Distribuido arriba)

De forma análoga, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(b\,\frac{\partial f}{\partial u} + d\,\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\
&= b^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2bd\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + d^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

(1.0 pts; Por derivar correctamente $\partial^2 g/\partial y^2$ usando la regla de la cadena y simetría)

b) (3.0 ptos.) Suponga que la función f satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1.$$

Determine las condiciones que deben tener a, b, c, d tales que se cumpla

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1.$$

Solución:

Sumamos las expresiones obtenidas anteriormente para $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (a^2+b^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2(ac+bd)\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + (c^2+d^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

(1.0 pts; Por efectuar correctamente la suma de las derivadas segundas y reagrupar los coeficientes)

Queremos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad \text{para toda } f \text{ tal que } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1.$$

Para que esta igualdad se mantenga para toda función f, es decir, para todo trío de valores

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right),$$

los coeficientes deben coincidir término a término en ambos lados de la igualdad. En particular, el coeficiente del término cruzado debe anularse:

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad c^2 + d^2 = 1, \qquad ac + bd = 0.$$

(2.0 pts; Por identificar correctamente la condición de igualdad para toda f y deducir las tres ecuaciones necesarias)

P3. (6.0 puntos) Encuentre los puntos críticos de

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$$

y determine si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

Solución:

Calculemos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,e^{-x^2-y^2}\,(1-2x^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\,e^{-x^2-y^2}\,(1-2y^2).$$

↳ +0.5 ↳ +0.5

(1.0 pts; Por calcular correctamente las derivadas parciales de primer orden)

↳ total

Los puntos críticos satisfacen $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Como $e^{-x^2-y^2} > 0$, las igualdades anteriores son equivalentes a

$$y(1-2x^2) = 0, \qquad x(1-2y^2) = 0.$$

Resolviendo por casos:

- Si $x = 0$, entonces la segunda ecuación se satisface; la primera exige $y = 0$. $\Rightarrow (0,0)$.
- Si $y = 0$, por simetría, resulta $x = 0$. $\Rightarrow (0,0)$.
- Si $y \neq 0$ y $x \neq 0$, entonces $1 - 2x^2 = 0$ y $1 - 2y^2 = 0$, es decir $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Por lo que los puntos críticos son:

$$\overset{+0.2}{(0,0)}, \quad \overbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{+0.4}, \overbrace{\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{+0.4}.$$

(1.0 pts; Por resolver correctamente el sistema y determinar los puntos críticos)

↳ total

Derivemos en segundo orden para clasificar. Por simplicidad, denotemos $A(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. De $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yA(1-2x^2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xA(1-2y^2)$ se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = yA(4x^3 - 6x), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = A(4xy^3 - 6xy), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = A(1-2x^2)(1-2y^2).$$

+0.3 +0.3 +0.4 resultado y justificar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(1.0 pts; Por derivar correctamente las expresiones de segunda orden)

↳ total

Clasifiquemos los puntos críticos.

En $(0,0)$**:**

$$A(0,0)=1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=1.$$

Hessiano:

$$H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \det H(0,0)=-1<0.$$

+0.5 evaluar H(0,0) +0.5 por clasificar

Por lo tanto, $(0,0)$ es un **punto silla**.

(1.0 pts; Por evaluar correctamente el Hessiano en $(0,0)$ **y clasificar como punto silla)**

↳ total

En $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$**:**

Aquí $x^2=y^2=\frac{1}{2}$, luego $1-2x^2=1-2y^2=0$ y $A=e^{-1}$. Así,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=yA(4x^3-6x)=yA\big(2x(2x^2-3)\big)=yA\big(2x(1-3)\big)=-4Axy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=A(4xy^3-6xy)=A\,xy(4y^2-6)=A\,xy(2-6)=-4Axy.$$

Por tanto,

$$H=\begin{pmatrix}-4Axy & 0\\ 0 & -4Axy\end{pmatrix}=-4e^{-1}xy\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

+1.0

La clasificación depende del signo de xy:

- Si $xy>0$ (signos iguales), entonces $-4e^{-1}xy<0$ y H es definida negativa. $\Rightarrow$ **máximo local** en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. +0.5
- Si $xy<0$ (signos opuestos), entonces $-4e^{-1}xy>0$ y H es definida positiva. $\Rightarrow$ **mínimo local** en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. +0.5

(2.0 pts; Por evaluar y clasificar correctamente los puntos críticos según el signo de xy**)**

↳ total

Indicación para corrección.

En la clasificación de los puntos críticos, también se acepta el uso del criterio de los valores propios de la matriz Hessiana. Si el procedimiento está correctamente aplicado y conduce a la misma clasificación, debe asignarse el mismo puntaje que al método basado en el determinante y la traza.

Recordememos que, si $H(x,y)$ es el Hessiano evaluado en el punto crítico. Se calculan sus valores propios λ_1,λ_2:

$$H(x,y)\,\mathbf{v}_i=\lambda_i\,\mathbf{v}_i,\quad i=1,2.$$

Luego:

- Si $\lambda_1,\lambda_2>0$, el punto crítico es un **mínimo local**.
- Si $\lambda_1,\lambda_2<0$, el punto crítico es un **máximo local**.
- Si $\lambda_1\lambda_2<0$, el punto crítico es un **punto de silla**.

Duración: 3h.