Control 2

P1. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$(m, n)\mathcal{R}(r, s) \iff m + s = n + r.$$

a) (2.5 ptos.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución: Demostraremos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia verificando que satisface las tres propiedades.

Reflexividad: Queremos verificar si $(m, n)\mathcal{R}(m, n)$, es decir, que se cumple que

$$m + n = n + m.$$

Esto es cierto, ya que la suma de números naturales es conmutativa. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es refleja. **(0.5 ptos.)**

Simetría: Sean $(m, n), (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que

$$(m, n)\mathcal{R}(r, s) \iff m + s = n + r.$$

Por la conmutatividad de la suma, tenemos que:

$$r + n = n + r = m + s = s + m \implies (r, s)\mathcal{R}(m, n).$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es simétrica. **(0.5 ptos.)**

Transitividad: Sean $(m, n), (r, s), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sabemos que:

$$(m, n)\mathcal{R}(r, s) \iff m + s = n + r$$

y

$$(r, s)\mathcal{R}(p, q) \iff r + q = s + p.$$

Luego, al sumar ambas igualdades y simplificar tenemos que:

$$(m + s) + (r + q) = (n + r) + (s + p) \implies m + q = n + p.$$

Con esto, hemos verificado que $(m, n)\mathcal{R}(p, q)$, y por lo tanto, $\mathcal{R}$ es transitiva. **(1.0 pto.)**

Como $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia. **(0.5 ptos.)**

b) (0.5 ptos.) Describa los elementos de las clases de equivalencia $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$, $[(0, 1)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1, 0)]_{\mathcal{R}}$.

Solución:
Comencemos describiendo la clase de equivalencia $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$. Buscamos todos los pares $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que:

$$(0,0)\mathcal{R}(r,s) \iff 0+s = 0+r.$$

Por tanto $s = r$ y así $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ contiene todos los pares de la forma (r,r), donde $r \in \mathbb{N}$:

$$[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(r,r) \mid r \in \mathbb{N}\}.$$

(0.1 ptos.)
De forma análoga, los elementos de $[(0,1)]_{\mathcal{R}}$ son todos los pares $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que:

$$(0,1)\mathcal{R}(r,s) \iff 0+s = 1+r.$$

Es decir, $s = r+1$, y luego:

$$[(0,1)]_{\mathcal{R}} = \{(r,r+1) \mid r \in \mathbb{N}\}.$$

(0.2 ptos.)
Por último, los elementos de $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$ son todos los pares $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $1+s = 0+r \iff r = s+1$. Por lo tanto,

$$[(1,0)]_{\mathcal{R}} = \{(r+1,r) \mid r \in \mathbb{N}\}.$$

(0.2 ptos.)

c) (3.0 ptos.) Demuestre que el conjunto cociente es:

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R} = \{[(0,n)]_{\mathbb{R}} \,|n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n,0)]_{\mathbb{R}} \,|n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Solución:
El conjunto cociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ está compuesto por todas las clases de equivalencia de la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De esta forma, es inmediato que:

$$\{[(0,n)]_{\mathcal{R}} \,|n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n,0)]_{\mathcal{R}} \,|n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}.$$

(0.5 ptos.)

Para demostrar la otra inclusión, podemos proceder al menos de dos formas distintas.

Primera forma:

Consideremos $[(r,s)]_{\mathcal{R}} \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$, con $r,s \in \mathbb{N}$. Supongamos primero que $r \leqslant s$. En este caso, al tomar $n := s - r$ podemos observar que $n \in \mathbb{N}$ y además que:

$$(0,n)\mathcal{R}(r,s) \iff 0+s = n+r \iff 0+s = (s-r)+r \iff s = s \iff V.$$

(0.5 ptos.)

Luego, $(0,n)\mathcal{R}(r,s)$ y por tanto $[(r,s)]_{\mathcal{R}} = [(0,n)]_{\mathcal{R}}$, dado que las clases de dos elementos que se relacionan son iguales. Así:

$$[(r,s)]_{\mathcal{R}} \in \{[(0,n)]_{\mathbb{R}} \, | n \in \mathbb{N}\}.$$

(0.3 ptos.)

Por otro lado, cuando $r > s$, definimos $n := r - s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notemos que:

$$(n,0)\mathcal{R}(r,s) \iff n + s = 0 + r \iff (r-s) + s = 0 + r \iff r = r \iff V.$$

(0.5 ptos.)

Luego, $(n,0)\mathcal{R}(r,s)$ y por tanto $[(r,s)]_{\mathcal{R}} = [(n,0)]_{\mathcal{R}}$. Se tiene entonces que:

$$[(r,s)]_{\mathcal{R}} \in \{[(n,0)]_{\mathbb{R}} \, | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

(0.3 ptos.)

Como lo anterior vale para cualquier par $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se concluye que

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R} \subseteq \{[(0,n)]_{\mathbb{R}} \, | n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n,0)]_{\mathbb{R}} \, | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

(0.4 ptos.)

Segunda forma:

Una manera alternativa es analizar las clases de equivalencia del conjunto

$$\{[(0,n)]_{\mathbb{R}} \, | n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n,0)]_{\mathbb{R}} \, | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Consideremos primero la clase de equivalencia $[(0,n)]_{\mathcal{R}}$ para $n \in \mathbb{N}$. Esta clase contiene todos los pares $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que satisfacen:

$$(0,n)\mathcal{R}(r,s) \iff 0 + s = n + r \iff s = n + r.$$

(0.4 ptos.)

Esto significa que los pares (r,s) en $[(0,n)]_{\mathcal{R}}$ son todos aquellos tales que que $s = r + n$. Por tanto,

$$(r, r+n)\mathcal{R}(0,n) \iff [(r, r+n)]_{\mathcal{R}} = [(0,n)]_{\mathcal{R}}.$$

(0.4 ptos.)

Por otro lado, la clase de equivalencia $[(n,0)]_{\mathcal{R}}$, para $n > 0$, contiene todos los pares $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que satisfacen:

$$(n,0)\mathcal{R}(r,s) \iff n + s = 0 + r \iff n + s = r.$$

(0.4 ptos.)

Esto significa que los pares (r,s) en $[(n,0)]_{\mathcal{R}}$ son tales que $s = r - n$. Por tanto,

$$(r, r-n)\mathcal{R}(n,0) \iff [(r, r-n)]_{\mathcal{R}} = [(n,0)]_{\mathcal{R}}.$$

(0.4 ptos.)

Como cada $s \in \mathbb{N}$ satisface que $s = r \pm n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, concluímos que el conjunto $\{[(0,n)]_{\mathcal{R}} \,|n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n,0)]_{\mathcal{R}} \,|n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ contiene todas las clases de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$.
(0.4 ptos.)

Cualquiera de estas dos formas nos permite concluir la igualdad:

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R} = \{[(0,n)]_{\mathbb{R}} \,|n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n,0)]_{\mathbb{R}} \,|n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

(0.5 ptos.)

P2. *a*) (1.0 pto.) Muestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{523} \binom{523}{k} (-2)^k = -1$.

Solución:
Se puede aplicar el teorema del binomio:
$$\sum_{k=0}^{523} \binom{523}{k} (-2)^k = \sum_{k=0}^{523} \binom{523}{k} (-2)^k (1)^{523-k} = (-2+1)^{523} = (-1)^{523} = -1.$$ **(1.0 pto.)**

b) (1.5 ptos) Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}$.

Solución:
Usando fracciones parciales, notamos que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} = \frac{3}{k(k+3)}$, y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

(0.5 ptos.)

Se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right).$$

(0.5 ptos.)

Aplicando la propiedad telescópica para cada suma, se tiene que el resultado final es

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right).$$

(0.5 ptos.)

c) Sea $J = \left\{ [a,b) \subseteq \mathbb{R} \ : \ \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{N}, \sqrt{b} = \sqrt{a} + 1 \right\}$.

i) (2.0 ptos.) Demuestre que J es numerable.

Solución:

Definimos una función $f : \mathbb{N} \to J,\ f(n) = [n^2, (n+1)^2)$. **(0.5 ptos.)**
Observamos que f es epiyectiva, es decir, que $f(\mathbb{N}) = J$. Esto porque para cada $[a, b) \in J$ tenemos que $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{N}$ con $\sqrt{b} = \sqrt{a}+1$, por lo que $f(\sqrt{a}) = [a, b)$. Por una proposición vista en clases, tenemos $|f(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$. Concluimos que $|J| \leq |f(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$. **(1.0 pto.)**
Y finalmente, como J es infinito, sabemos que J es numerable. **(0.5 ptos.)**

ii) (1.5 ptos.) Definimos la relación $\mathcal{R}$ en J como

$$[a, b)\,\mathcal{R}\,[c, d) \iff c \leqslant a.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

Solución:
Es inmediato ver que la relación es refleja, ya que $a \leqslant a \implies [a, b)\,\mathcal{R}\,[a, b)$. **(0.4 ptos.)**
Además, es antisimétrica porque para todo $[a, b), [c, d) \in J$, se tiene

$$[a, b)\,\mathcal{R}\,[c, d) \wedge [c, d)\,\mathcal{R}\,[a, b) \iff c \leqslant a \wedge a \leqslant c \implies a = c.$$

Y entonces, por la definición de J, tenemos que $b = (\sqrt{a} + 1)^2 = (\sqrt{c} + 1)^2 = d$ y por tanto $[a, b) = [c, d)$ **(0.6 ptos.)**
Por último, es transitiva porque para todos $[a, b), [c, d), [e, f) \in J$ se tiene:

$$[a, b)\,\mathcal{R}\,[c, d) \wedge [c, d)\,\mathcal{R}\,[e, f) \in J \iff c \leqslant a \wedge e \leqslant c \implies e \leqslant a$$

por lo que $[a, b)\,\mathcal{R}\,[e, f)$ **(0.5 ptos.)**

P3. Para $i \in \mathbb{N}$, sea $B_i = \{(i, 1), (i, 2), \ldots, (i, i)\}$.

a) (2.0 ptos.) Muestre que $|B_i| = i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y luego determine $\left|\bigcup_{i=0}^{n} B_i\right|$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución:
Sea $i \in \mathbb{N}$. Los elementos de B_i se pueden enumerar como $b_1 = (i, 1), b_2 = (i, 2), \ldots b_i = (i, i)$. Por lo tanto, $|B_i| = i$. **(0.5 ptos.)**
Notamos que para $i \neq j$ se tiene $B_i \cap B_j = \emptyset$ porque si $(a, b) \in B_i \cap B_j$ entonces $a = i$ y $a = j$, una contradicción. **(0.5 ptos.)**
Por una proposición vista en clases, tenemos que $|\bigcup_{i=0}^{n} B_i| = \sum_{i=0}^{n} |B_i|$ **(0.5 ptos.)**. Por lo tanto, $|\bigcup_{i=0}^{n} B_i| = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **(0.5 ptos.)**

b) (1.0 pto.) Determine si $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ es igual a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Tenga en cuenta que $0 \in \mathbb{N}$.

Solución: No son iguales, porque $(0, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pero $(0, 1) \notin B_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ **(1.0 pto.)**

c) (1.5 ptos.) Determine $|\mathcal{P}(B_i) \times B_4|$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Solución:

Por una proposición vista en clases, para todo conjunto finito tenemos que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. **(0.5 ptos.)**.

También, por otra proposición, sabemos que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, para conjuntos finitos A, B. **(0.5 ptos.)**

Entonces $|\mathcal{P}(B_i) \times B_4| = |\mathcal{P}(B_i)| \cdot |B_4| = 2^i \cdot 2^2 = 2^{i+2}$. **(0.5 ptos.)**

d) (1.5 ptos.) Sea $f : B_{10} \to \{11, 12, 13, \ldots, 20\}$ una función inyectiva. ¿Es f biyectiva?

Solución:

Por una proposición vista en clases, si A, B son conjuntos finitos con $|A| = |B|$ entonces una función es inyectiva si y solamente si es epiyectiva. **(1.0 pto.)**.

Luego, solo basta mostrar que $|B_{10}| = |\{11, 12, \ldots, 20\}|$. Esto es cierto porque en la parte a) se probó que $|B_i| = i$ y por tanto $|B_{10}| = 10$. Además, es inmediato que el segundo conjunto también tiene cardinal 10. **(0.5 ptos.)**

Duración: 3 horas.

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente.