



CONTROL 2

P1. Sean A, B, C conjuntos.

a) (2 pts.) Muestre que $A = (A \cap C) \cup (A \setminus C)$.

Solución:

Primera forma (mediante álgebra de conjuntos):

$$\begin{aligned}(A \cap C) \cup (A \setminus C) &= (A \cap C) \cup (A \cap C^c) && \text{(Propiedad conocida: } A \setminus B = A \cap B^c \text{ - 0,5 pts.)} \\ &= A \cap (C \cup C^c) && \text{(Distributividad de } \cap \text{ sobre } \cup \text{ - 0,5 pts.)} \\ &= A \cap E && \text{(Propiedad conocida: } A \cup A^c = E, \text{ donde } E \text{ es la referencia - 0,5 pts.)} \\ &= A && \text{(} E \text{ neutro para } \cap \text{ - 0,5 pts.)}\end{aligned}$$

Segunda forma (usando las definiciones de las operaciones de conjuntos y de la igualdad):

Sea E la referencia y $x \in E$ un elemento cualquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}x \in (A \cap C) \cup (A \setminus C) &\iff x \in (A \cap C) \vee x \in (A \setminus C) && \text{(Definición de } \cup \text{ - 0,3 pts.)} \\ &\iff (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \notin C) && \text{(Definiciones de } \cap \text{ y } \setminus \text{ - 0,5 pts.)} \\ &\iff x \in A \wedge (x \in C \vee \overline{x \in C}) && \text{(Distributividad de } \wedge \text{ sobre } \vee \text{ y definición de } \notin \text{ - 0,5 pts.)} \\ &\iff x \in A \wedge V && \text{(Tautología } p \vee \bar{p} \iff V \text{ - 0,3 pts.)} \\ &\iff x \in A && \text{(Tautología } p \wedge V \iff p \text{ - 0,3 pts.)}\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $(A \cap C) \cup (A \setminus C) = A$ (0,1 pts.).

b) (2 pts.) Muestre que si $A \cup C = B \cup C$, entonces $A \setminus C = B \setminus C$.

Solución:

Primera forma (mediante álgebra de conjuntos):

Intersectando ambos lados de la igualdad $A \cup C = B \cup C$ con C^c (0,4 pts. por la idea):

$$\begin{aligned}(A \cup C) \cap C^c &= (B \cup C) \cap C^c \\ (A \cap C^c) \cup (C \cap C^c) &= (B \cap C^c) \cup (C \cap C^c) && \text{(Distributividad de } \cap \text{ sobre } \cup \text{ - 0,4 pts.)} \\ (A \cap C^c) \cup \emptyset &= (B \cap C^c) \cup \emptyset && \text{(Propiedad conocida: } A \cap A^c = \emptyset \text{ - 0,4 pts.)} \\ A \cap C^c &= B \cap C^c && \text{(} \emptyset \text{ neutro para } \cup \text{ - 0,4 pts.)} \\ A \setminus C &= B \setminus C && \text{(Propiedad conocida: } A \setminus B = A \cap B^c \text{ - 0,4 pts.)}\end{aligned}$$

Segunda forma (usando las definiciones de las operaciones de conjuntos y de la igualdad):

Sea E la referencia y $x \in E$ un elemento cualquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus C &\iff x \in A \wedge x \notin C && \text{(Definición de } \setminus \text{)} \\
 &\iff (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin C) \\
 &\quad \text{(Tautologías } p \vee F \iff p, p \wedge \bar{p} \iff F \text{ y definición de } \notin \text{)} \\
 &\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge x \notin C && \text{(Distributividad de } \wedge \text{ sobre } \vee \text{)} \\
 &\iff (x \in A \cup C) \wedge x \notin C && \text{(Definición de } \cup \text{)} \\
 &\iff (x \in B \cup C) \wedge x \notin C && (A \cup C = B \cup C \text{ y definición de } =) \\
 &\quad \vdots && \text{(Repitiendo los pasos previos en orden inverso)} \\
 &\iff x \in B \setminus C
 \end{aligned}$$

(Se repartirán **1,9 pts.** de manera aproximadamente uniforme entre los pasos necesarios de un desarrollo como el anterior, en la medida de que estén presentes las justificaciones).

De lo anterior se concluye que $A \setminus C = B \setminus C$ (**0,1 pts.**).

c) (**2 pts.**) Use las partes a) y b) para mostrar que

$$A = B \iff A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C.$$

Solución:

Implicación ($\implies$): Esta implicación es directa, pues al reemplazar B por A , ambas igualdades del lado derecho son del tipo “un conjunto igual a sí mismo” (**0,4 pts.** por indicar que esta implicación es directa, o algo similar).

Implicación ($\impliedby$): Si $A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C$, entonces por la parte b) $A \cap C = B \cap C \wedge A \setminus C = B \setminus C$ (**0,8 pts.**).

Luego, usando la parte a), $A = (A \cap C) \cup (A \setminus C) = (B \cap C) \cup (B \setminus C) = B$ (**0,8 pts.**).

P2. a) (**2 pts.**) Determine $\{1, 2\} \times \{3, 4\}$, $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ y $\mathcal{P}(\{3, 4\})$, y muestre que $C = \{(1, 3), (2, 4)\}$ NO pertenece al conjunto $\mathcal{Z}$ definido por

$$\mathcal{Z} = \{X \times Y \mid X \in \mathcal{P}(\{1, 2\}) \wedge Y \in \mathcal{P}(\{3, 4\})\} = \{X \times Y \mid X \subseteq \{1, 2\} \wedge Y \subseteq \{3, 4\}\}.$$

Solución:

Directo de las definiciones:

- $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ (**0,5 pts.**).
- $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ (**0,4 pts.**).
- $\mathcal{P}(\{3, 4\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ (**0,4 pts.**).

Mostremos ahora que $C = \{(1, 3), (2, 4)\}$ no puede pertenecer a $\mathcal{Z}$.

Primera forma:

Por contradicción, si C perteneciese a $\mathcal{Z}$, entonces sería $C = X \times Y$, con X subconjunto de $\{1, 2\}$ e Y subconjunto de $\{3, 4\}$. Luego, como $(1, 3) \in C$, entonces $1 \in X$ y $3 \in Y$. Del mismo modo, como $(2, 4) \in C$, entonces también $2 \in X$ y $4 \in Y$. Así, X tendría que ser todo $\{1, 2\}$ e Y tendría que ser todo $\{3, 4\}$, y por tanto C debería ser todo $\{1, 2\} \times \{3, 4\}$, que no es el caso y así llegamos a una contradicción.

Segunda forma:

Podemos listar los elementos de $\mathcal{Z}$ y comprobar que C no está entre ellos. Estos elementos son los productos cartesianos $X \times Y$ donde $X \subseteq \{1, 2\}$ e $Y \subseteq \{3, 4\}$. Eliminando los resultados repetidos ($\emptyset$ aparece 7 veces), se obtiene

$$\mathcal{Z} = \{\emptyset, \{(1, 3)\}, \{(1, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4)\}, \{(2, 3)\}, \{(2, 4)\}, \{(2, 3), (2, 4)\}, \{(1, 3), (2, 3)\}, \{(1, 4), (2, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}\}.$$

Simplemente mirando este listado de los elementos de $\mathcal{Z}$ vemos que C no es una de ellos.

(0,7 pts. por justificar correctamente que $C \notin \mathcal{Z}$).

b) Sean A, B conjuntos y definamos $\mathcal{W} = \{X \times Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\} = \{X \times Y \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$.

i) **(2 pts.)** Muestre que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$.

Solución:

Debemos demostrar que todo elemento de $\mathcal{W}$ pertenecerá también a $\mathcal{P}(A \times B)$ **(0,2 pts.)**:

$$X \times Y \in \mathcal{W} \iff X \subseteq A \wedge Y \subseteq B \quad (\text{Definición de } \mathcal{W} - \mathbf{0,6 pts.})$$

$$\implies X \times Y \subseteq A \times B \quad (\text{Propiedad del producto cartesiano} - \mathbf{0,6 pts.})$$

$$\iff X \times Y \in \mathcal{P}(A \times B) \quad (\text{Definición de conjunto potencia} - \mathbf{0,6 pts.})$$

ii) **(2 pts.)** Si A y B tienen al menos dos elementos distintos cada uno, muestre que $\mathcal{W} \neq \mathcal{P}(A \times B)$.

Solución:

De manera análoga a lo hecho en la parte a), consideremos $a_1, a_2 \in A$ dos elementos distintos y $b_1, b_2 \in B$ también distintos. Entonces el conjunto $C = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ es un subconjunto de $A \times B$, luego $C \in \mathcal{P}(A \times B)$. Sin embargo podemos ver que C no es de la forma $X \times Y$ con $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, y por tanto $C \notin \mathcal{W}$ (y por lo tanto los conjuntos $\mathcal{W}$ y $\mathcal{P}(A \times B)$ no son iguales). **(1 pto.)**

En efecto, razonando por contradicción, si C tuviese dicha forma, entonces necesariamente $a_1, a_2 \in X$ y $b_1, b_2 \in Y$. Pero entonces se tendría que, por ejemplo, $(a_2, b_1) \in X \times Y$, es decir $(a_2, b_1) \in C$, lo que no es cierto y por tanto llegamos a una contradicción. **(1 pto.)**

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

Justifique sus respuestas.

No olvide anotar su nombre y RUT, identificando sus hojas de respuestas.