Control 2

P1. Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos.

a) (1.5 ptos.) Muestre que $(A \cap B) \cup (A \Delta B) = A \cup B$.

Solución:

Primera forma: En efecto,

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \Delta B) &= (A \cap B) \cup ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) && (\text{pq } X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)) \\
&= \big((A \cap B) \cup (A \setminus B)\big) \cup (B \setminus A) && (\text{asoc. del } \cup) \\
&= A \cup (B \setminus A) && (\text{pq } X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)) \\
&= A \cup (B \cap A^c) && (\text{caract. del } \setminus) \\
&= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A^c)}_{E} && (\text{distrib. del } \cup \text{ c/r al } \cap) \\
&= A \cup B.
\end{aligned}$$

[0.4 ptos. por la 1era igualdad, i.e., usar la caract./def. de Δ; 0.6 ptos. por la 2da y 3era igualdad; 0.5 ptos. por los dos últimos pasos. Asignar mitad de puntaje si no justifican]

Segunda forma: En efecto,

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \Delta B) &= (A \cap B) \cup \big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) && (\text{pq } X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)) \\
&= (A \cap B) \cup \big((A \cup B) \cap (A \cap B)^c)\big) && (\text{caract. de } \setminus) \\
&= (A \cap B) \cup \big((A \cup B) \cap (A^c \cup B^c))\big) && (\text{De Morgan}) \\
&= \big((A \cap B) \cup (A \cup B)\big) \cap \big((A \cap B) \cup (A^c \cup B^c)\big) && (\text{distrib. de } \cup \text{ c/r } \cap) \\
&= (A \cup B) \cap \big((A \cap B) \cup (A^c \cup B^c)\big) && (\text{pq } A \cap B \subseteq A \cup B) \\
&= (A \cup B) \cap \big(\big[(A \cap B) \cup A^c\big] \cup B^c\big) && (\text{asoc. de } \cup) \\
&= (A \cup B) \cap \big(\big[\underbrace{(A \cup A^c)}_{E} \cap (B \cup A^c)\big] \cup B^c\big) && (\text{distrib. de } \cup \text{ c/r a } \cap) \\
&= (A \cup B) \cap \big((B \cup A^c) \cup B^c\big) \\
&= (A \cup B) \cap \big(\underbrace{(B \cup B^c)}_{E} \cup A^c\big) && (\text{asoc. y conmut. de } \cup) \\
&= (A \cup B) \cap E && (\text{pq } E \cup X = E) \\
&= A \cup B. && (\text{pq } A \cup B \subseteq E)
\end{aligned}$$

[0.4 ptos. por la 1era igualdad, i.e., usar la caracterización de Δ; 0.5 ptos. por las igualdades 2, 3 y 4; 0.3 ptos. por mostrar/justificar que $(A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B$

y 0.3 ptos. por mostrar que $(A \cap B) \cup A^c \cup B^c = E$. Asignar mitad de puntaje si no justifican.]

Indicaciones para la corrección:

- En la primera forma, está bien si en vez de mencionar demuestran (explícita o implícitamente) que $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$.
- Hay varias variantes de la segunda forma. Por ejemplo, para la 6ta igualdad se puede justificar que:

  $$(A \cap B) \cup (A \cup B) = \big[(A \cap B) \cup A\big] \cup B = \big[A \cap (A \cup B)\big] \cup B = (A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup B.$$

b) (2.0 ptos.) Muestre que para todo $C, Y, Z \subseteq E$, si $C \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset$, entonces $C \cap Y \neq \emptyset$ o $C \cap Z \neq \emptyset$.

Solución:
Primera forma: Basta probar la contrarecíproca, es decir, que si $C \cap Y = \emptyset$ y $C \cap Z = \emptyset$, entonces $C \cap (Y \cup Z) = \emptyset$ **(1.0 pto.)**. Para ello, observar que:

$$\begin{aligned} C \cap Y = \emptyset \ \wedge \ C \cap Z = \emptyset &\Longrightarrow (C \cap Y) \cup (C \cap Z) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset && (\textbf{[0.5 ptos.]}) \\ &\Longleftrightarrow C \cap (Y \cup Z) = \emptyset && (\text{distrib. } \cap \text{ c/r } \cup \ \textbf{[0.5 ptos.]}) \end{aligned}$$

Segunda forma: Por hipótesis $C \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset$. Consideramos los siguientes dos casos **[1.0 pto. por separar en casos]**:

- <u>Caso $C \cap Y = \emptyset$</u>: Observar que

  $$C \cap (Y \cup Z) = (C \cap Y) \cup (C \cap Z) = \emptyset \cup (C \cap Z) = C \cap Z. \tag{1}$$

  Luego, por hipótesis, concluimos que $C \cap Z \neq \emptyset$. **[0.7 ptos. por análisis de este caso]**
- <u>Caso $C \cap Y \neq \emptyset$</u>: Por definición del caso, se tiene la conclusión deseada, a saber, que $C \cap Y \neq \emptyset$ o $C \cap Z \neq \emptyset$. **[0.3 ptos. por análisis de este caso]**

Indicaciones para la corrección:

- En la primera forma pueden partir calculando $C \cap (Y \cup Z) = (C \cap Y) \cup (C \cap Z)$ lo que les daría 0.5 puntos. Luego, pueden identificar que ambos conjuntos son vacíos lo que les daría el resto de los 0.5 puntos.

c) (2.5 ptos.) Suponga que existe $e \in E$ tal que $A \cap B = \{e\}$. Muestre que para todo conjunto $C \subseteq E$, si $C \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ y $C \cap (A \Delta B) = \emptyset$, entonces $A \cap B \cap C = \{e\}$.

<u>Nota</u>: Si le es útil, puede usar cualquiera de las partes anteriores (aun si no las contesta).

Solución: Queremos demostrar que $A \cap B \cap C = \{e\}$.
Por enunciado, $A \cap B = \{e\}$. Luego,

$$A \cap B \cap C = \{e\} \cap C = \begin{cases} \{e\}, & \text{si } e \in C, \\ \emptyset, & \text{si } e \notin C. \end{cases}$$

Bastará entonces demostrar que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ o lo que es equivalente, que $C \cap \{e\} \neq \emptyset$ **[0.6**

ptos. por reformular la conclusión en algo equivalente].

Primera forma: Veamos que $C \cap \{e\} \neq \emptyset$. En efecto, del enunciado y

$$\begin{aligned}
C \cap (A \cup B) &= C \cap \big((A \cap B) \cup (A \Delta B)\big) && \text{(de la parte a))}\\
&= \big[C \cap (\underbrace{A \cap B}_{\{e\}})\big] \cup \big[\underbrace{C \cap (A \Delta B)}_{\emptyset}\big] && \text{(distrib. del } \cap \text{ c/r } \cup)\\
&= C \cap \{e\}. && \text{(enunciado e hipótesis)}
\end{aligned}$$

Por hipótesis, se concluye que $C \cap \{e\} \neq \emptyset$, como queríamos establecer. [**0.8 ptos. por la 1era igualdad; 0.8 ptos. por las igualdades 2 y 3; 0.3 ptos. por aplicar la hipótesis y concluir**]

Segunda forma: Veamos que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. En efecto, por la parte a) sabemos que si $Y = A \cap B$ y $Z = A \Delta B$, entonces $Y \cup Z = A \cup B$, luego [**0.8 ptos. por usar/aplicar parte b)**]

$$C \cap (Y \cup Z) = C \cap (A \cup B) \neq \emptyset,$$

donde la última desigualdad se tiene por hipóteiss. Por la parte b) sigue que [**0.8 ptos. por usar/aplicar parte b)**]

$$C \cap (A \cap B) = C \cap Y \neq \emptyset \quad \vee \quad C \cap (A \Delta B) = C \cap Z \neq \emptyset$$

Pero, por hipótesis, sabemos que $C \cap (A \Delta B) = \emptyset$, por lo que la única posibilidad que queda es que $A \cap B \cap C = C \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, como queríamos establecer. [**0.3 ptos. por concluir**]

Tercera forma: Veamos que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. En efecto,

$$\begin{aligned}
A \cap B \cap C &= (A \cap B) \cap C && \text{(asoc. } \cap)\\
&= [(A \cup B) \setminus (A \Delta B)] \cap C && (\text{pq } A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B))\\
&= [(A \cup B) \cap (A \Delta B)^c] \cap C && \text{(def. } \setminus)\\
&= (A \cup B) \cap [(A \Delta B)^c \cap C] && \text{(asoc. } \cap)\\
&= (A \cup B) \cap C && (\text{pq } C \cap (A \Delta B) = \emptyset \iff C \subseteq (A \Delta B)^c)\\
&= C \cap (A \cup B) && \text{(conmut. de } \cap)
\end{aligned}$$

[**0.8 ptos. por las 3 primeras igualdades y 0.8 ptos. por las 3 últimas**] Por hipótesis, sigue que $A \cap B \cap C = C \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, como queríamos establecer. [**0.3 ptos. por aplicar la hipótesis y concluir**]

Indicaciones para la corrección:

- Se podría argumentar por doble inclusión, es decir, probar que $A \cap B \cap C \subseteq \{e\}$ y que $\{e\} \subseteq A \cap B \cap C$. Lo primero se tiene porque $A \cap B \cap C = C \cap \{e\} \subseteq \{e\}$. Lo segundo, es equivalente a que $\{e\} \subseteq C$, o en otras palabras, que $e \in C$. La primera forma es justamente una demostración de esto último.
- La primera parte de la argumentación (la que tiene asignada 0.6 ptos.) puede hacerse al final, junto con concluir, lo que es igualmente válido.

P2. Sea E un conjunto de referencia y $A \subseteq E$ un subconjunto fijo. Se define la función $F : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ mediante:

$$F(X) = (X \Delta A)^c.$$

a) (3.0 ptos.) Demuestre que para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ se tiene que $F(F(X)) = X$ (es decir, $F \circ F$ es la función identidad en $\mathcal{P}(E)$).

Indicación: Probar que si $Y \subseteq E$, entonces $Y \Delta A = Y^c \Delta A^c$ y aplicar con $Y = F(X)$.

Solución: Probemos primero la indicación. En efecto,

$$\begin{aligned}
Y^c \Delta A^c &= (Y^c \setminus A^c) \cup (A^c \setminus Y^c) && \text{(caract./def. de } \Delta\text{)}\\
&= (Y^c \cap (A^c)^c) \cup (A^c \cap (Y^c)^c) && \text{(caract. de } \setminus\text{)}\\
&= (Y^c \cap A) \cup (A^c \cap Y) && \text{(doble complementación)}\\
&= (Y \cap A^c) \cup (A \cap Y^c) && \text{(conmut. de } \cap \text{ y } \cup\text{)}\\
&= (Y \setminus A) \cup (A \setminus Y) && \text{(caract. de } \setminus\text{)}\\
&= Y \Delta A. && \text{(caract./def. de } \Delta\text{)}
\end{aligned}$$

[0.6 ptos. por las 3 primeras igualdades y 0.6 ptos. por las 3 últimas]

Calculemos ahora $F \circ F(X)$ para un $X \subseteq E$ arbitrario. Observar que si $Y = F(X)$:

$$\begin{aligned}
F \circ F(X) &= F(F(X)) && \text{(def. } \circ\text{)}\\
&= F(Y) && \text{(def. de } Y\text{)}\\
&= (Y \Delta A)^c && \text{(def. de } F\text{)}\\
&= (Y^c \Delta A^c)^c && \text{(indicación)}\\
&= \big((F(X))^c \Delta A^c\big)^c && \text{(def. de } Y\text{)}\\
&= \big(((X \Delta A)^c)^c \Delta A^c\big)^c && \text{(def. de } F \text{ \textbf{[0.6 ptos. por llegar hasta aquí]})}\\
&= \big((X \Delta A) \Delta A^c\big)^c && \text{(doble complementación)}\\
&= \big(X \Delta (\underbrace{A \Delta A^c}_{E})\big)^c && \text{(asoc. de } \Delta\text{)}\\
&= (X^c)^c && (X \Delta E = X^c)\\
&= X. && \text{(doble complementación)}
\end{aligned}$$

[0.6 ptos. por aplicar la indicación, como arriba o en alguna parte del desarrollo; 0.6 ptos. por las 4 últimas igualdades]

Indicaciones para la corrección:

- Descontar como máximo 1.0 pto. por no justificar los pasos.
- Hay otras formas de proceder que no utilizan la indicación. Por ejemplo, se podría usar alguna de las caracterizaciones de Δ para, por ejemplo, concluir que

$$F(X) = (X \cap A) \cup (X^c \cap A^c) \qquad \text{o} \qquad F(X) = (X^c \cup A) \cap (X \cup A^c),$$

y después evaluar $F \circ F(X)$. Si bien es factible proceder de esta manera, los desarrollos a que dan lugar son largos. A continuación se incluye el desarrollo usando la primera igualdad de más arriba así como una posible distribución de puntajes (se omite el caso de la segunda igualdad – si es que se usa, distribuir puntaje de forma similar a lo que sigue).

Sea $X \subseteq E$ arbitrario. Se tiene que:

$$\begin{aligned} F \circ F(X) &= F(F(X)) \\ &= F((X \cap A) \cup (X^c \cap A^c)) \\ &= (((X \cap A) \cup (X^c \cap A^c)) \cap A) \cup (((X \cap A) \cup (X^c \cap A^c))^c \cap A^c). \end{aligned}$$

Asignar 0.5 ptos. por la derivación anterior.

Desarrollando el primer término de la última unión:

$$\begin{aligned} ((X \cap A) \cup (X^c \cap A^c)) \cap A &= \\ &= ((X \cap A) \cap A) \cup ((X^c \cap A^c) \cap A) && \text{(distrib. de } \cap \text{ c/r a } \cup) \\ &= (X \cap (A \cap A)) \cup (X^c \cap (A^c \cap A)) && \text{(asoc. de } \cap) \\ &= (X \cap A) \cup (X^c \cap \emptyset) && \text{(Idempotencia y propiedad } A \cap A^C = \emptyset) \\ &= (X \cap A) \cup \emptyset && (\emptyset \text{ es absorvente para } \cap) \\ &= X \cap A && (\emptyset \text{ es neutro para } \cup) \end{aligned}$$

y desarrollando el segundo término de la unión:

$$\begin{aligned} ((X \cap A) \cup (X^c \cap A^c))^c \cap A^c &= (X \cap A)^c \cap (X^c \cap A^c)^c \cap A^c && \text{(Leyes de De Morgan)} \\ &= ((X^c \cup A^c) \cap ((X^c)^c \cup (A^c)^c)) \cap A^c \\ & && \text{(Leyes de De Morgan)} \\ &= ((X^c \cup A^c) \cap (X \cup A)) \cap A^c && \text{(Doble complementación)} \\ &= (X \cup A) \cap ((X^c \cup A^c) \cap A^c) && \text{(conmut. y asoc. de } \cap) \\ &= (X \cup A) \cap A^c && \text{(pues } A^c \subseteq X^c \cup A^c) \\ &= (X \cap A^c) \cup (A \cap A^c) && \text{(distrib. de } \cap \text{ c/r a } \cup) \\ &= (X \cap A^c) \cup (\emptyset) && \text{(propiedad } A \cap A^C = \emptyset) \\ &= X \cap A^c. && (\emptyset \text{ es neutro para } \cup) \end{aligned}$$

Asignar 1.0 pto. por cada una de las derivaciones anteriores (la de cada término).

Así, de ambos desarrollos, se obtiene:

$$\begin{aligned} F \circ F(X) &= (X \cap A) \cup (X \cap A^c) \\ &= X \cap (A \cup A^c) && \text{(distrib. de } \cap \text{ c/r a } \cup) \\ &= X \cap E && \text{(propiedad } A \cup A^C = E) \\ &= X. && (E \text{ es. neutro para } \cap) \end{aligned}$$

Asignar 0.5 ptos. por esta última derivación.

- Otra posible argumentación, que tampoco requiere probar la indicación, es demostrar que $F(X) = X\Delta A^c$, como sigue:

$$\begin{aligned}
F(X) &= (X\Delta A)^c && \text{(def. de } F\text{)}\\
&= \big((X\cup A)\setminus(X\cap A)\big)^c && \text{(caract. de } \Delta\text{)}\\
&= \big((X\cup A)\cap(X\cap A)^c\big)^c && \text{(caract. de } \setminus\text{)}\\
&= (X^c\cap A^c)\cup(X\cap A) && \text{(De Morgan y doble complementación)}\\
&= (X\cap(A^c)^c)\cup(A^c\cap X^c) && \text{(conmut. de } \cap \text{ y } \cup\text{, y doble complementación)}\\
&= (X\setminus A^c)\cup(A^c\setminus X) && \text{(caract. de } \setminus\text{)}\\
&= X\Delta A^c. && \text{(caract. de } \Delta\text{)}
\end{aligned}$$

Asignar 1.5 ptos. si es que se obtiene la caracterización precedente de F.

Usado esta última caracterización, se puede evaluar $F\circ F(X)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
F\circ F(X) &= (X\Delta A^c)\Delta A^c && \text{(caracterización de } F\text{)}\\
&= X\Delta(\underbrace{A^c\Delta A^c}_{\emptyset}) && \text{(asoc. de } \Delta\text{)}\\
&= X. && (\emptyset \text{ es neutro para } \Delta)
\end{aligned}$$

Asignar 1.5 ptos. por este último desarrollo.

b) (3.0 ptos.) Muestre que F es biyectiva.

Solución:

Primera forma: Podemos utilizar la siguiente propiedad de la composición de funciones (Teorema de Caracterización de la Inversa): si $f : E_1 \to E_2$ y $g : E_2 \to E_1$ son funciones y $f\circ g = \mathrm{id}_{E_2}$ y $g\circ f = \mathrm{id}_{E_1}$, entonces f es biyectiva y $f^{-1} = g$. [**1.5 ptos. por invocar el Teorema de Caracterización**]

Utilizando esta propiedad para $f = g = F$ se tienen las hipótesis de la propiedad, pues $F\circ F$ es la identidad en $\mathcal{P}(E)$ (se verifica que el dominio y codominio de $F\circ F$ es $\mathcal{P}(E)$, que es el dominio y el codominio de $\mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$). Por lo tanto F es biyectiva (y $F^{-1} = F$). [**1.5 ptos. por aplicar a) para concluir que F es invertible luego biyectiva. Si no observan que el dominio y codominio de $F\circ F$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ son iguales, descontar 0.5 ptos.**]

Segunda forma: Veamos que F es inyectiva y epiyectiva.

Para la inyectividad, sean X y X' subconjuntos de E tales que $F(X) = F(X')$. Podemos aplicar F a esta igualdad obteniendo que $F(F(X)) = F(F(X'))$, es decir

$$F\circ F(X) = F\circ F(X').$$

Pero, por la parte a), esto equivale a decir que $X = X'$. [**0.5 ptos. por dar la definición o plantear correctamente la hipótesis y conclusión de inyectividad; 1.0 pto. por la demostración basada en a)**]

Para la epiyectividad, sea $Y \in \mathcal{P}(E)$ un conjunto arbitrario. Veamos que existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $F(X) = Y$. Para ello, observar que $X = F(Y)$ es tal que $F(X) = F(F(Y)) = F\circ F(Y) = Y$. [**0.5 ptos. por dar la definición o plantear el argumento para probar epiyectividad; 1.0 pto. por la demostración basada en a)**]

Así F es biyectiva pues es inyectiva y epiyectiva.

Tercera forma: Observar que $\mathrm{Dom}(F \circ F) = \mathcal{P}(E) = \mathrm{Dom}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)})$. Además, $\mathrm{Cod}(F \circ F) = \mathcal{P}(E) = \mathrm{Cod}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)})$. Luego, de la parte a) se tiene que $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$. [**1.0 pto. por justificar que la composición es la identidad. Descontar 0.5 si no justifica que dominio y codominio es** $P(E)$**.**]

Recordando que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva, y como $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ es inyectiva, sigue que F es inyectiva. [**1.0 pto. por conluir inyectividad**]

Recordando que si $g \circ f$ es epiyectiva, entonces g es epiyectiva, y como $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ es inyectiva, sigue que F es epiyectiva.[**1.0 pto. por conluir epiyectividad**]

Cuarta forma: Se puede probar inyectividad y epiyectividad por separado usando las definiciones correspondientes.

Para la inyectividad, sean $X, X' \in \mathcal{P}(E)$. Queremos demostrar que si $F(X) = F(X')$, entonces $X = X'$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
F(X) = F(X') &\implies (X\Delta A)^c = (X'\Delta A)^c && \text{(def. de } F\text{)}\\
&\iff X\Delta A = X'\Delta A \\
&\qquad \text{(complementando ambos lados del = y por doble completación)}\\
&\implies (X\Delta A)\Delta A = (X'\Delta A)\Delta A \\
&\qquad \text{(haciendo dif. simétrica por } A \text{ a ambos lados del =)}\\
&\iff X\Delta(\underbrace{A\Delta A}_{\emptyset}) = X'\Delta(\underbrace{A\Delta A}_{\emptyset}) && \text{(asoc. de } \Delta\text{)}\\
&\iff X = X'. && (\emptyset \text{ es neutro para } \Delta)
\end{aligned}$$

Luego, F es inyectiva. [**0.5 ptos. por dar la definición o plantear correctamente la hipótesis y conclusión de inyectividad; 1.0 pto. por la demostración. Descontar hasta máximo 0.5 ptos. por no justificar los pasos.**]

Para la epiyectividad. Sea $Y \in \mathcal{P}(E)$ arbitrario. Queremos demostrar que existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $F(X) = Y$.

En efecto, si $X = (Y\Delta A)^c$, entonces $F(X) = ((Y\Delta A)^c\Delta A)^c$, y siguiendo un desarrollo como en la parte a) se verifica que $F(X) = Y$. Luego, F es epiyectiva. [**0.5 ptos. por dar la definición o plantear el argumento para probar epiyectividad; 1.0 pto. por la demostración como en a). Descontar máximo 0.5 spor no justificar los pasos.**]

Indicaciones para la corrección:

- Esencialmente, la *segunda forma* y la *cuarta forma* son iguales. En la primera, se trabaja con F y en la segunda se reemplaza por su definición.

Duración: 1 hora y 15 minutos.