FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Control 2, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2021/2 (6 de Noviembre)

P.1. (a) Considere la función $f(x) = x \int_0^x e^{-t^2} dt.$

(i) **(2 pts.)** Calcule $f'(x)$ y encuentre intervalos de crecimiento, máximos y mínimos de f (si los hay).

Solución: Derivando queda

$$f'(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt + xe^{-x^2}$$

0.5pt

Claramente, para $x > 0$ $f'(x) > 0$ por lo que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$.

0.5pt

Además, para $x < 0$ se tiene que

$$f'(x) = -\int_x^0 e^{-t^2} dt + xe^{-x^2} < 0$$

por lo que f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$.
Obs: También se puede argumentar por paridad, probando que f es par.

0.5pt

Como f decrece antes de 0, luego crece y es continua en $x = 0$, se deduce que $x = 0$ es el único mínimo local (y global) de f.

0.5pt

(ii) **(2 pts.)** Calcule $f''(x)$ y encuentre intervalos de convexidad y de concavidad. Encuentre (si los hay) todos los puntos de inflexión.

Solución: Derivando f' queda

$$f''(x) = e^{-x^2} + e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(1 - x^2)$$

1.0pt

Así $f''(x) > 0$ para $x \in (-1, 1)$, de donde se concluye que f es convexa en $[-1, 1]$ (por continuidad).
Además, $f''(x) < 0$ para $x \in (\infty, -1) \cup (1, \infty)$, de donde se concluye que f es cóncava en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$.
Los puntos de inflexión son ± 1.

1.0pt

(b) **(2 pts.)** Sean g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$ que satisface $g(0) = g'(0) = 0$ y $a > 0$.
Aplique el TVM a la función auxiliar $h(x) = g(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 g(a)$ y su derivada para demostrar que $\exists \xi \in (0, a)$ tal que $\frac{a^2}{2} g''(\xi) = g(a)$.

Solución: Primero tenemos que: $h(0) = g(0) - 0g(a) = 0$ y $h(a) = g(a) - 1 \cdot g(a) = 0$, como g es continua y derivable en $\mathbb{R}$, se puede usar el TVM en $[0, a]$ obteniendo que

$$\exists \xi_1 \in (0, a) \text{ t.q. } h'(\xi_1) = 0.$$

0.7pt

Además, $h'(x) = g'(x) - \dfrac{2x}{a^2} g(a)$,

0.3pt

de modo que $h'(0) = 0$. Usando el TVM para la función h' en el intervalo $[0, \xi_1]$, tenemos que

$$\exists \xi \in (0, \xi_1) \subseteq (0, a) \text{ t.q. } h''(\xi) = 0$$

0.7pt

Además, como $h''(x) = g''(x) - \frac{2}{a^2} g(a)$, de la igualdad anterior se obtiene el resultado despejando $g(a)$.

0.3pt

P.2. (a) **(4 pts.)** Considere la función $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Encuentre $n \in \mathbb{N}^*$ y funciones escalonadas $e^-, e^+\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ asociadas a la partición $P = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{2n}{n}\}$, tales que: $e^-(x) \leq f(x) \leq e^+(x)$ para todo $x \in [0,2]$ y

$$\int_0^2 (e^+ - e^-) \leq 10^{-3}$$

Solución: Como f es creciente en $[0,2]$, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, donde $x_i = \frac{i}{n}$, con $i \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, se tiene que:

$$f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$$

por lo que conviene definir las funciones escalonadas como:

$$\begin{aligned} e^-(x) &= f(x_{i-1}) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \forall i \in \{1, \ldots, 2n\} \\ e^+(x) &= f(x_i) \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \forall i \in \{1, \ldots, 2n\} \\ e^-(x_i) = e^+(x_i) &= f(x_i) \qquad \forall i \in \{0, 1, \ldots, 2n\} \end{aligned}$$

Con esto se cumple que $e^-(x) \leq f(x) \leq e^+(x)$ para todo $x \in [0,2]$.
Obs: los valores de e^- y e^+ en $x = x_i$ no son relevantes.

2.0pt

Además,

$$\int_0^2 (e^+ - e^-) = \sum_{i=1}^{2n} \left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right] \frac{1}{n}$$

1.0pt

$$= \frac{1}{n} \left[f(x_{2n}) - f(x_0) \right] = \frac{1}{n}$$

Para cumplir el requerimiento, basta tomar $n \geq 1000$.

1.0pt

También se pueden dar fórmulas explícitas, con lo cual la solución es más larga de escribir:

$$e^-(x) = \begin{cases} x_{i-1}^2 = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 & \forall x \in [x_{i-1}, x_i), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ 1 & \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \forall i \in \{n+1, \ldots, 2n\} \end{cases}$$

1.0pt

$$e^+(x) = \begin{cases} x_i^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2 & \forall x \in [x_{i-1}, x_i), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ 1 & \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \forall i \in \{n+1, \ldots, 2n\} \end{cases}$$

1.0pt

Con lo cual

$$\int_0^2 (e^+ - e^-) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i^2-(i-1)^2}{n^2}\right]\frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} 0$$

1.0pt

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{n}$$

Para cumplir el requerimiento, basta tomar $n \geq 1000$.

1.0pt

(b) **(2 pts.)** Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \sin^{n+2}(x) = \frac{-1}{n+2}\cos(x)\sin^{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2}\int \sin^n(x)dx$$

Solución: Integramos por partes:

$$\begin{array}{ll} f = \operatorname{sen}^{n+1}(x) & f' = (n+1)\operatorname{sen}^n(x)\cos(x) \\ g' = \operatorname{sen}(x) & g = -\cos(x) \end{array}$$

Así

$$I_{n+2} = -\operatorname{sen}^{n+1}(x)\cos(x) + (n+1)\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^2(x)$$

1.0pt

$$= -\operatorname{sen}^{n+1}(x)\cos(x) + (n+1)\int \operatorname{sen}^n(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))$$

$$= -\operatorname{sen}^{n+1}(x)\cos(x) + (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

0.5pt

De aquí, despejando, se deduce que

$$(n+2)I_{n+2} = -\operatorname{sen}^{n+1}(x)\cos(x) + (n+1)I_n$$

De donde el resultado se deduce dividiendo por $(n+2)$.

0.5pt

Para consultas o comentarios de corrección, escribir a: Jorge San Martín ⟨jorge@dim.uchile.cl⟩