

P1

I)

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & \gamma & \beta+3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & \gamma & \beta+3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2, R_4 \leftarrow R_4 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & \gamma & \beta+3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-1 & \beta+1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \beta \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

1.5 pts punto por el escalonamiento correcto y 3 puntos por el análisis, basado en el escalonamiento realizado.

- a) No solución si: $\gamma=0$ y $\beta \neq 0$ (1 punto)
- b) Infinitas soluciones si: $\gamma=0$ y $\beta=0$ (1 punto)
- c) Solución única si: $\gamma \neq 0$ (1 punto)

II)

Comenzamos con la matriz aumentada $[A | I]$ y escalonamos

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

En esta etapa sabemos que la matriz es invertible pues la escalonada de A no tiene ceros en la diagonal.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Puntaje: 0.7 puntos por el escalonamiento, 0.4 puntos por argumentar que A es invertible, y 0.4 puntos reconocer la inversa

MA1102 - 2 2025

C1 Pauta P2

a) Considere el subconjunto $U \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a+b-c-d=0 \wedge a-b-c-d=0 \right\}$$

I) Pruebe que U es subespacio vectorial de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

FORMA 1:

1º) $U \neq \emptyset$, es claro que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ (0,5 pt)
(cumple las dos ecuaciones)

2º) sean $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $v, u \in U$

* [7d: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha v + \beta u \in U$ (0,5 pt)

$$\left. \begin{aligned} \alpha a + \beta e + \alpha b + \beta f - \alpha c - \beta g - \alpha d - \beta h &= \\ \alpha \underbrace{(a+b-c-d)}_{=0} + \beta \underbrace{(e+f-g-h)}_{=0} &= 0 \quad \checkmark \end{aligned} \right\} 0,5 \text{ pt}$$

* [Pon lo que se cumplen ambas ecuaciones
y $\alpha v + \beta u \in U$ luego U es s.e.v de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

* Si se considera $\beta = 1$ o $\alpha = 1$, se considera igualmente válida la demostración.
Basta con demostrar que $v + \beta u$ está en U .

FORMA 2:

Venir cómo son las matrices en U utilizando las ecuaciones:

$$a + b + c + d = 0 \quad (1)$$

$$a + b - c - d = 0 \quad (2)$$

$$(1): a = b + c + d$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Reemplazando en (2)} \\ 2b = 0 \end{array} \right\} 0,2 \text{ pts}$$

$$\text{Entonces } u \in U \Rightarrow u = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbb{R} \quad (0,3 \text{ pts})$$

$$u = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0,3 \text{ pt}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad 0,2 \text{ pt}$$

0,5 pts $\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ sabemos que el generado} \\ \text{por un subconjunto no vacío de un espacio} \\ \text{vectorial es un subespacio.} \\ \text{Por lo que } U \text{ es s.e.v. de } M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \end{array} \right.$

3ª FORMA: (combina las anteriores)

- Pueden usar las ecuaciones para ver cómo son las matrices en U . (0,5 pts)

- Verificar que $U \neq \emptyset$ A, B (0,5 pts)

- Ver que para dos matrices $\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$ de la forma $(0,5 \text{ pts})$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\alpha A + \beta B \in U. \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

II) Dé una base y calcule la dimensión de U :

Si usamos la forma 1 en I:

1º) Usando las ecuaciones deben llegar a:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & y \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{K} \right\} \quad (0,2 \text{ pts})$$

$$u \in U \Leftrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que $U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ 0,4 pts
0,3 pts

que claramente es L.I (dado que si

$x \neq 0$ la coordenada $u_{21} \neq 0$

$y \neq 0$ " " $u_{22} \neq 0$

luego para obtener

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las dos matrices que generen, los escalares x e y deben ser cero.

(pueden argumentar, dado que son dos matrices que son L.I. dado que una no es múltiplo de la otra).

y por último

0,5 pts (L.I.)

de alguna forma razonable?

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{genera } U \text{ y es L.I.}$$

$\therefore$ es base de U .

$\dim(U) = 2$ dado que la dimensión es la cardinalidad de una base.

$\rightarrow$ (0,5 pts)

+

+

b) V un $\mathbb{R}$ -ev. $\{v_1, v_2\} \subset V$ L.I

$$a \in \mathbb{R}$$

$$A = \{v_1 + av_2, av_1 + v_2\}$$

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tq A es L.D.

Sol:

A es L.D si existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ No ambos nulos tq

$$\alpha_1(v_1 + av_2) + \alpha_2(av_1 + v_2) = 0$$

-> 0.6 pts

Como $\{v_1, v_2\}$ es L.I sabemos que cualquier combinación lineal de estos vectores que de el cero será con todos los escalares nulos.

$$(1) = \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 a)}_0 v_1 + \underbrace{(a\alpha_1 + \alpha_2)}_0 v_2 = 0$$

-> 0.6 pts

luego

$$\alpha_1 + \alpha_2 a = 0$$

$$a\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

sistema lineal

-> 0.4 pts

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

-> 0.6 pts

Si el sistema tiene solución única tenemos que $(1-a^2) \neq 0$ y los vectores son L.I.

necesitamos que exista una solución no trivial ie: $(1-a^2)=0$

$$a=1$$

$$a=-1$$

-> 0.6 pts

luego

$$\mathcal{A} = \{v_1 + v_2, v_1 + v_2\} \text{ en } L.V.$$

$$\mathcal{A} = \{v_1 - v_2, -v_1 + v_2\} \text{ en } L.V.$$

y para cualquier otro a el conjunto es L.I.

-> 0.2 pts (concluir)

(P3) (a) pauta.

Sean U y V en $M_{n,n}(\mathbb{R})$ con

$$(1) UU = I_n \text{ y } (2) VV = I_n.$$

$$\text{Entonces } (UV)(UV) \stackrel{(a)}{=} (UV)(VU)$$

$$\stackrel{(b)}{=} U(VV)U \stackrel{(c)}{=} UI_nU \stackrel{(d)}{=} UU \stackrel{(e)}{=} I_n$$

(a) propiedad dada como hipótesis. (0.3)

(b) Asociatividad del producto (0.3) [puede ser implícito]

(c) Uso de la hipótesis (2) (0.2)

(d) Propiedad de la matriz identidad I_n (0.3)

(e) Uso de la hipótesis (1) (0.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \stackrel{(a)}{=} \begin{pmatrix} 1 & a+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $UU = I_2 \Leftrightarrow b^2 = 1$ y $a+ab=0 \Leftrightarrow$

1) $b=1$ y $a=0$ ó

2) $b=-1$ y a es cualquier número real. (0.2)

(a) producto de matrices (0.3)

P3(b) pauta

Para $x \in \mathbb{R}^n$ con $Ax=0$ se cumple

que $A(Ax) = A0 = 0$. Es decir,

$A^2x=0$. ^(0.7) Por hipótesis A^2 es invertible.

opción 1

De esta forma, al multiplicar la ecuación

$0=A^2x$ por $(A^2)^{-1}$, se obtiene que

$$0=(A^2)^{-1} \cdot 0 = (A^2)^{-1} A^2 x = I_n x = x. \quad \leftarrow (0.7)$$

opción 2

También se puede argumentar, directamente, que

A^2 invertible garantiza que $A^2x=0$ implica $x=0$.

Para justificar que A es invertible, basta mencionar un resultado del curso que dice

que una matriz cuadrada cuyo sistema homogéneo tiene solución única (igual a 0) es invertible. ^(0.6)

P3(c) pauta

Se sabe que para V y W s.e.v. de U tales que $U = V \oplus W$ se

cumple que

$$\dim U = \dim V + \dim W. \quad (1.0)$$

Con las hipótesis dadas esto no es posible, pues el lado izquierdo es impar y el lado derecho es par ya que es la suma de dos números impares. (0.5)