



Control 1 - Primavera 2025

- P1. a) (2.0 pts.) Sabiendo que la proposición *Si la casa es amarilla y Pedro vive en la casa, entonces hay electricidad* es falsa, determine la veracidad de (1) *Si la casa es roja implica que Pedro no vive en la casa* y (2) *Hay electricidad si y sólo si Pedro vive en la casa*.
- b) (2.0 pts.) Determine la negación de la proposición

$$p : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$$

y encuentre el valor de verdad de p .

- c) (2.0 pts.) Considere los conjuntos $A = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, a, \{b\}\}$ y $B = \{a, b\}$. Determine el valor de verdad de la proposición

$$(A \subseteq B \vee B \subseteq A \vee A \in \mathcal{P}(B)) \implies \emptyset \in A \vee \{\emptyset\} \in A.$$

Solución:

- a) Consideremos las siguientes proposiciones lógicas:

$$p : \text{"La casa es amarilla"}$$

$$q : \text{"Pedro vive en la casa"}$$

$$r : \text{"Hay electricidad"}$$

Luego, la proposición del enunciado corresponde a $p \wedge q \Rightarrow r$. Sabiendo que esta proposición es falsa, se deduce que los únicos valores de verdad posibles son $p \Leftrightarrow V$, $q \Leftrightarrow V$ y $r \Leftrightarrow F$.

[0.5 pts. por escribir la proposición usando lenguaje lógico correctamente y 0.5 pts. por deducir el valor de verdad de cada proposición involucrada]

Usando esto, y el hecho de que $\text{"La casa es roja"} \Leftrightarrow \sim p$, se tiene que

$$(1) \text{"Si la casa es roja implica que Pedro no vive en la casa"} \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V.$$

$$(2) \text{"Hay electricidad sí y sólo si Pedro vive en la casa"} \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (F \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow F.$$

Se concluye que (1) $\Leftrightarrow V$ y que (2) $\Leftrightarrow F$.

[0.5 pts. por (1) y 0.5 pts. por (2)]

- b) Se tiene que la negación de p es

$$\sim p : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$$

Se tiene que $\sim p \Leftrightarrow V$, pues basta tomar $x = 0$, el cual cumple para todo $y \in \mathbb{R}$ que $xy = 0y = 0 \neq 1$.

Se concluye entonces que $p \Leftrightarrow F$.

[1 pt. por negar p y un punto por deducir el valor de verdad de p]

- c) Notemos que se tiene que

$$(1) A \subseteq B \Leftrightarrow F, \text{ ya que } \emptyset \in A, \text{ pero } \emptyset \notin B.$$

$$(2) B \subseteq A \Leftrightarrow F, \text{ ya que } b \in B, \text{ pero } b \notin A.$$

$$(3) A \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow F, \text{ por definición del conjunto } B.$$

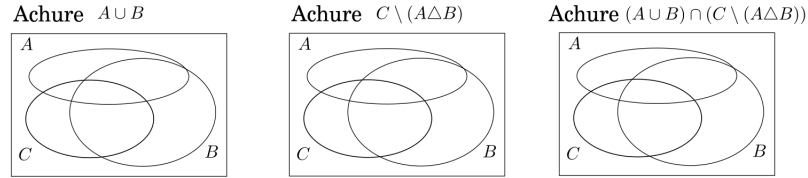
0,3 pts por (1) y 0.4 pts por (2) justificando apropiadamente. 0,3 pts por (3)]

Luego

$$\begin{aligned}
[(A \subseteq B \vee B \subseteq A \vee A \in \mathcal{P}(B)) \implies \emptyset \in A \vee \{\emptyset\} \in A] &\iff [F \vee F \vee F \implies \emptyset \in A \vee \{\emptyset\} \in A] \\
&\iff [F \implies \emptyset \in A \vee \{\emptyset\} \in A] \\
&\iff V
\end{aligned}$$

[1 pt. por deducir el valor de verdad de la proposición solicitada.]

- P2.** a) (2.0 pts.) Copie los diagramas de Venn que se presentan más abajo en su hoja de respuesta y achure/sombrée los conjuntos que se indican: $A \cup B$, $C \setminus (A \triangle B)$ y $(A \cup B) \cap (C \setminus (A \triangle B))$.



- b) (2.0 pts.) Demuestre la siguiente igualdad de conjuntos.

$$(A \cup B^c) \cap (B \cup C^c) \cap (C \cup A^c) = (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c).$$

- c) (2.0 pts.) Considere la fórmula de recurrencia

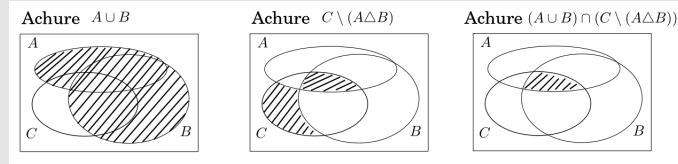
$$a_{n+1} = \begin{cases} -\frac{3}{2}a_n^2 + \frac{11}{2}a_n - 2 & \text{si } n \geq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Demuestre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{3n} = 1, a_{3n+1} = 2, a_{3n+2} = 3.$$

Solución:

- a) La respuesta es correcta si se marca de manera inequívoca la región pedida.



[Otorgar 0.6 pts. por cada uno de las dos primeras y ~~0.3~~ ^{0.3} por la tercera.]

- b) Opción 1. Se aplicará la distributividad de la operación $\cap$ con respecto a la operación $\cup$, y las propiedades $X \cap X^c = \emptyset$ y $Y \cup \emptyset = Y$. Por una parte,

$$\begin{aligned}
(A \cup B^c) \cap (B \cup C^c) &= (A \cap B) \cup (B^c \cap B) \cup (A \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si llamamos $D = (A \cap B) \cup (A \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c)$, entonces

$$\begin{aligned}
D \cap (C \cup A^c) &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c \cap C) \\
&\quad \cup (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap C^c \cap A^c) \cup (B^c \cap C^c \cap A^c) \\
&= (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c).
\end{aligned}$$

[0.5 pts. por definir la estrategia, 0.5 pts por el uso de la distributividad y 0.5 por el uso de cada una de las propiedades $X \cap X^c = \emptyset$ y $Y \cup \emptyset = Y$].

Opción 2. Sean

$$L = (A \cup B^c) \cap (B \cup C^c) \cap (C \cup A^c) \text{ y } R = (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c).$$

Probaremos la igualdad por doble inclusión. Sea $x \in L$. Entonces $x \in A \cup B^c$, $x \in B \cup C^c$ y $x \in C \cup A^c$. Evaluemos por casos:

- Si $x \in A$, entonces $x \notin A^c$, por lo que $x \in C$; esto último implica que $x \notin C^c$, de donde $x \in B$. De esta manera, $x \in A$ implica que $x \in A \cap B \cap C$.
- Por otra parte, $x \in A^c$ implica que $x \notin A$, lo que fuerza que $x \in B^c$, por lo que $x \notin B$. Se deduce entonces que $x \in C^c$, lo que equivale a que $x \notin C$. Esto implica que $x \in A^c$, por lo que $x \in A^c \cap B^c \cap C^c$.

A partir de ambos análisis se muestra la inclusión $L \subseteq R$.

Para ver que $R \subseteq L$, sea $x \in R$. Entonces $x \in A \cap B \cap C$ o $x \in A^c \cap B^c \cap C^c$. En el primer caso, $x \in L = (A \cup B^c) \cap (B \cup C^c) \cap (C \cup A^c)$, ya que $A \cap B \cap C$ está incluido en L . De manera análoga, cuando $x \in A^c \cap B^c \cap C^c$ se tiene que $x \in L$, pues $A^c \cap B^c \cap C^c$ está incluido en L .

Habiendo mostrado que $L \subseteq R$ y que $R \subseteq L$ se termina probando que $L = R$. [0.5 pts. por definir la estrategia y 0.75 por la justificación de cada una de las inclusiones.].

c) Aplicamos el Principio de Inducción. En primer lugar, verificamos el caso base, $n = 0$.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{3}{2}a_0^2 + \frac{11}{2}a_0 - 2 = -\frac{3}{2} + \frac{11}{2} - 2 = 2, \quad a_2 = -\frac{3}{2}2^2 + \frac{11}{2}2 - 2 = 3.$$

[0.5 pts. por el caso base]. Ahora, verificamos el paso inductivo. La hipótesis de inducción es

$$Q(n) : a_{3n} = 1, a_{3n+1} = 2 \text{ y } a_{3n+2} = 3.$$

[Invocar la hipótesis de inducción (implícita o explícitamente) 0.5 pts.].

Calculamos $a_{3(n+1)}$, $a_{3(n+1)+1}$ y $a_{3(n+1)+2}$ usando la fórmula de recurrencia, notando que $3(n+1) = (3n+2) + 1$ y que $a_{3n+2} = 3$. [Realizar la conexión de los índices para aplicar la hipótesis de inducción 0.5 pts.].

$$\begin{aligned} a_{3(n+1)} &= -\frac{3}{2}a_{3n+2}^2 + \frac{11}{2}a_{3n+2} - 2 = -\frac{3}{2}3^2 + \frac{11}{2}3 - 2 = 1 \\ a_{3(n+1)+1} &= -\frac{3}{2}a_{3(n+1)}^2 + \frac{11}{2}a_{3(n+1)} - 2 = 2 \\ a_{3(n+1)+2} &= -\frac{3}{2}a_{3(n+1)+1}^2 + \frac{11}{2}a_{3(n+1)+1} - 2 = 3. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos probado que se cumple $Q(n+1)$, lo que termina la demostración.

[Realizar los cálculos para determinar los términos $a_{3(n+1)+i}$, $i = 0, 1, 2$ 0.5 pts.].

P3. a) (2.0 pts.) Determine cuáles de las siguientes 3-tuplas son funciones.

$$f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x, y) \mid xy = 1\}), \quad g = (A \times B, A, \{((a, b), c) \mid a = c\})$$

b) (2.0 pts.) Para las siguientes funciones indique cuáles son inyectivas, cuáles son epiyectivas y cuáles biyectivas.

$$f = ([-1, 1], [0, 2], \{(x, y) \mid x^2 + (y/2)^2 = 1, y \geq 0\}), \text{ es decir, } f(x) = 2\sqrt{1-x^2}.$$

$$g = ([0, 1], [-2, 0], \{(x, y) \mid x^2 + (y/2)^2 = 1, y \leq 0\}), \text{ es decir, } g(x) = -2\sqrt{1-x^2}$$

y

$$h = ([-1, 0], [-3, 0], \{(x, y) \mid x^2 + (y/2)^2 = 1, y \leq 0\}), \text{ es decir, } h(x) = -2\sqrt{1-x^2}.$$

c) (2.0 pts.) Encuentre las inversas de las funciones anteriores que sean biyectivas.

Solución:

- a) ■ Notemos que f no es función ya que para $x = 0$, no existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$. **[1pt. por el contraejemplo.]**
- Por el contrario, g sí es función, ya que para cada $(a, b) \in A \times B$, se tiene que $f(a, b) = a$ está definido y es único para cada par ordenado $(a, b) \in A \times B$, pues está únicamente determinado por $a \in A$. **[0.5 pts. por decir que está definido y 0.5 pts. por la unicidad.]**
- b) ■ **[0.35pts]** La función f no es inyectiva, ya que $f(-1) = 0 = f(1)$, sin embargo $-1 \neq 1$. De esta manera, f tampoco es biyectiva.
- [0.3pts]** f es epiyectiva. En efecto. Sea $y \in [0, 2]$ arbitrario. Notemos que $y = 2\sqrt{1-x^2} \iff y/2 = \sqrt{1-x^2} \implies y^2/4 = 1-x^2 \iff x^2 = 1-y^2/4 \implies |x| = \sqrt{1-y^2/4} \in [0, 1]$ ya que $y \in [0, 2]$. Así $x \in [-1, 1]$.

- **[0.3pts]** La función g es inyectiva.

Opción 1: Sean $g(x_1) = g(x_2) \in [-2, 0]$. Entonces se tiene que $-2\sqrt{1-x_1^2} = -2\sqrt{1-x_2^2} \iff \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \implies 1-x_1^2 = 1-x_2^2 \iff -x_1^2 = -x_2^2 \iff |x_1| = |x_2|$. Como el dominio de g es $[0, 1]$, tenemos que si $x \in \text{dom}(f)$, entonces $x = |x|$ y de esta manera concluimos que $x_1 = x_2$.

Opción 2: Sean $x_1 \neq x_2 \in [0, 1]$. Como $x_1, x_2 \geq 0$, entonces $x_1^2 \neq x_2^2$; esto implica que $1-x_1^2 \neq 1-x_2^2$. Ahora, como $x_1, x_2 \in [0, 1]$, podemos notar que $1-x_1^2, 1-x_2^2 \in [0, 1]$, y de esta manera podemos concluir que $\sqrt{1-x_1^2} \neq \sqrt{1-x_2^2} \iff -2\sqrt{1-x_1^2} \neq -2\sqrt{1-x_2^2} \iff g(x_1) \neq g(x_2)$.

[0.3pts] g es epiyectiva. Sea $y \in [-2, 0]$ arbitrario. Notemos que $y = -2\sqrt{1-x^2} \iff -y/2 = \sqrt{1-x^2} \implies y^2/4 = 1-x^2 \iff x^2 = 1-y^2/4 \iff |x| = \sqrt{1-y^2/4}$. Como el dominio de g es igual a $[0, 1]$, tenemos que $x = |x|$, y así $x = \sqrt{1-y^2/4}$. Finalmente, como $y \in [-2, 0]$, podemos concluir que $x \in [0, 1]$.

[0.1pts] g es biyectiva porque es inyectiva y epiyectiva.

- **[0.3pts]** h es inyectiva.

Opción 1: Sean $h(x_1) = h(x_2) \in [-1, 0]$. Entonces se tiene que $-2\sqrt{1-x_1^2} = -2\sqrt{1-x_2^2} \iff \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \implies 1-x_1^2 = 1-x_2^2 \iff -x_1^2 = -x_2^2 \iff |x_1| = |x_2|$. Como el dominio de h es igual a $[-1, 0]$, tenemos que $x = -|x|$ para cada elemento en $[-1, 0]$. Así, de la ecuación anterior ($|x_1| = |x_2|$), concluimos que $-x_1 = -x_2$, lo que es equivalente a $x_1 = x_2$.

Opción 2: Sean $x_1 \neq x_2 \in [-1, 0]$. En este caso podemos ver que $x_1^2 \neq x_2^2$; esto implica que $1-x_1^2 \neq 1-x_2^2 \iff \sqrt{1-x_1^2} \neq \sqrt{1-x_2^2} \iff -2\sqrt{1-x_1^2} \neq -2\sqrt{1-x_2^2} \iff h(x_1) \neq h(x_2)$.

[0.35pts] h no es epiyectiva ya que para $y = -3$ no existe $x \in [-1, 0]$ tal que $-3 = -2\sqrt{1-x^2}$, pues de existir, debiese ocurrir que $x^2 = -5/4$, lo cual es imposible en $\mathbb{R}$. De esta manera, h no es biyectiva.

- c) Sea $g^{-1} : [-2, 0] \rightarrow [0, 1]$, dada por $g^{-1}(y) = \sqrt{1-y^2/4}$. Notemos que como $y \in [-2, 0]$, tenemos que $1-y^2/4 \in [0, 1]$, por lo que la función no se indefine en el intervalo $[-2, 0]$. Así, g^{-1} es función. Para $y \in [-2, 0]$, se tiene que y^2 es único, lo cual implica que $1-x^2/4$ sea único, por tanto, $\sqrt{1-x^2/4}$ también es único. **[0.5pts. por definir la función con su dominio y contradominio, y 0.5pts por justificar que es función (0.25 pts. por decir que está definido y 0.25pts. por la unicidad).]**
- Mostraremos que g^{-1} es la inversa de g mostrando las siguientes dos proposiciones. **[1 pt. Se deben mostrar cualesquiera dos de las siguientes afirmaciones.]**

- Mostraremos que $g^{-1} \circ g = \text{id}_{[0,1]}$.

Sea $x \in [0, 1]$. Entonces $g^{-1} \circ g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(-2\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(-2\sqrt{1-x^2})^2/4} = \sqrt{1-(4(1-x^2))/4} = \sqrt{1-(1-x^2)} = x$.

- Mostraremos que $g \circ g^{-1} = \text{id}_{[-2,0]}$.

Sea $x \in [-2, 0]$. Entonces $g \circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = g(\sqrt{1-x^2/4}) = -2\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2/4})^2} =$

$-2\sqrt{1 - (1 - x^2/4)} = -2\sqrt{x^2/4} = -|x| = x$, en donde la última igualdad se cumple porque $x \in [-2, 0]$.

- Mostraremos que g^{-1} es biyectiva.

g^{-1} es inyectiva.

Opción 1: Sean $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2) \in [0, 1]$. Entonces se tiene que $\sqrt{1 - x_1^2/4} = \sqrt{1 - x_2^2/4} \iff 1 - x_1^2/4 = 1 - x_2^2/4 \iff x_1^2/4 = x_2^2/4 \iff x_1^2 = x_2^2 \iff |x_1| = |x_2|$. Como el dominio de g^{-1} es $[-2, 0]$, tenemos que si $x \in \text{dom}(f)$, entonces $-x = |x|$ y de esta manera concluimos que $x_1 = x_2$.

Opción 2: Sean $x_1 \neq x_2 \in [-2, 0]$. Como $x_1, x_2 \leq 0$, entonces $x_1^2 \neq x_2^2$; esto implica que $x_1^2/4 \neq x_2^2/4$, y por lo tanto $1 - x_1^2/4 \neq 1 - x_2^2/4$. Ahora, como $x_1, x_2 \in [-2, 0]$, podemos notar que $1 - x_1^2/4, 1 - x_2^2/4 \in [0, 1]$, y de esta manera podemos concluir que $\sqrt{1 - x_1^2/4} \neq \sqrt{1 - x_2^2/4} \iff g^{-1}(x_1) \neq g^{-1}(x_2)$.

g^{-1} es epiyectiva. Sea $y \in [0, 1]$ arbitrario. Notemos que $y = \sqrt{1 - x^2/4} \implies y^2 = 1 - x^2/4 \iff x^2/4 = 1 - y^2 \iff x^2 = 4(1 - y^2) \implies |x| = \sqrt{4(1 - y^2)} \iff |x| = 2\sqrt{1 - y^2}$. Como el dominio de g^{-1} es igual a $[-2, 0]$, tenemos que $-x = |x|$, y así $x = -2\sqrt{1 - y^2}$. Finalmente, como $y \in [0, 1]$, podemos concluir que $x \in [-2, 0]$.

g^{-1} es biyectiva porque es inyectiva y epiyectiva.

Tiempo: 3.0 hrs.