Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2025.

CONTROL 1

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la(s) hipótesis.

P1. *a*) (3 ptos.) Demuestre sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \land (r \Rightarrow p)] \iff [(p \lor q \lor r) \Rightarrow (p \land q \land r)]$$

Solución: Como de costumbre, la tautología se puede demostrar de muchas maneras. Aquí presentamos dos maneras como ejemplo del nivel de argumentación que se debe seguir.

[Asignar puntajes de la siguiente manera:

- Correctitud lógica de la demostración (máximo 1.5 puntos): Se otorga si el estudiante llega efectivamente a la conclusión correcta, es decir, demuestra que la fórmula es una tautología mediante una cadena de razonamientos válidos. Se puede otorgar máximo 0.5 puntos si el resultado posee algún paso incorrecto pero la estructura tiene pasos lógicos coherentes.
- Justificación de los pasos (máximo 1 punto): Se otorga si el estudiante explica adecuadamente los pasos utilizados, sea por leyes lógicas (e.g., doble negación, distributiva, etc.) o por la estrategia en que se abordará la demostración (e.g., modus ponens, transitividad de equivalencias/implicancias, contradicción, etc). Si hay pasos sin justificar o con justificación incompleta, se puede otorgar máximo 0.5 puntos.
- Claridad y estructura de la argumentación (máximo 0.5 puntos): Se otorga si la demostración es ordenada, clara y legible, mostrando una línea de razonamiento consistente. Se puede otorgar 0.2 puntos si hay errores de presentación, falta de orden, o si cuesta seguir la demostración aunque esté correcta.

]

Primera forma: Se hará por transitividad de proposiciones equivalentes:

$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \land (r \Rightarrow p) \iff$

$\iff (\bar{p} \lor q) \land (\bar{q} \lor r) \land (\bar{r} \lor p)$ (caracterización de implicancia $s \Rightarrow t$ por $\bar{s} \lor t$)

$\iff [(\bar{p} \lor q) \land (\bar{q} \lor r)] \land (\bar{r} \lor p)$ (asociatividad de $\land$)

$\iff [(\bar{p} \land (\bar{q} \lor r)) \lor (q \land (\bar{q} \lor r))] \land (\bar{r} \lor p)$ (distrib. de $\land$ c/r a $\lor$)

$\iff [(\bar{p} \land \bar{q}) \lor (\bar{p} \land r) \lor (q \land \bar{q}) \lor (q \land r)] \land (\bar{r} \lor p)$ (distrib. de $\land$ c/r a $\lor$)

$\iff [(\bar{p} \land \bar{q}) \lor (\bar{p} \land r) \lor F \lor (q \land r)] \land (\bar{r} \lor p)$ (consistencia $s \land \bar{s} \iff F$)

$\iff [(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge r) \vee (q \wedge r)] \wedge (\bar{r} \vee p)$ (Identidad, $s \vee F \iff s$)
$\iff [(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge (\bar{r} \vee p)) \vee (\bar{p} \wedge r \wedge (\bar{r} \vee p)) \vee (q \wedge r \wedge (\bar{r} \vee p)]$ (distrib. de $\wedge$ c/r a $\vee$)
$\iff [(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge r \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \bar{r}) \vee (q \wedge r \wedge p)]$ (distrib. de $\wedge$ c/r a $\vee$)
$\iff [(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})) \vee ((\bar{p} \wedge p) \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge (r \wedge \bar{r})) \vee ((\bar{p} \wedge p) \wedge r) \vee (q \wedge (r \wedge \bar{r})) \vee (q \wedge r \wedge p)]$ (conmutatividad y asociatividad de $\wedge$)
$\iff [(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})) \vee (F \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge F) \vee (F \wedge r) \vee (q \wedge F) \vee (q \wedge r \wedge p)]$ (consistencia $s \wedge \bar{s} \iff F$)
$\iff [(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee F \vee F \vee F \vee F \vee (q \wedge r \wedge p)]$ (dominancia $a \wedge F \iff F$)
$\iff [\underline{(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})} \vee (q \wedge r \wedge p)]$ (identidad $s \vee F \iff s$)
$\iff \overline{(p \vee q \vee r)} \vee (p \wedge q \wedge r)$ (De Morgan y asociatividad)
$\iff (p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$ (caracterización de implicancia $s \Rightarrow t$ por $\bar{s} \vee t$)

Segunda forma:

Demostremos la equivalencia probando dos implicancias. Primero demostremos que

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \Longrightarrow [(p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)].$$

Para ello asumamos como hipótesis el lado izquierdo, es decir, asumimos que $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)$.

Por transitividad de la implicancia, tenemos que se cumple que $(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$. Esto junto con la hipótesis implica que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

Reordenado los términos gracias a la conmutatividad (y asociatividad) de $\wedge$ obtenemos

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \wedge ((q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)) \wedge ((r \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)).$$

Remplazando las doble implicancias por equivalencias:

$$(p \iff q) \wedge (q \iff r) \wedge (r \iff p)$$

o dicho de otra forma, las tres variables p, q y r son equivalentes. Con esto, si una de ellas es verdadera entonces las tres proposiciones son verdaderas. Es decir, $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$ que es exactamente lo que queríamos mostrar.

Ahora, para la otra implicancia, queremos demostrar lo siguiente:

$$[(p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)] \Longrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)].$$

Asumamos entonces que $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$. Pero esto implica que $(p \vee q \vee r) \Rightarrow q$ que a su vez implica que $p \Rightarrow q$. De manera análoga podemos obtener que $q \Rightarrow r$ y que $r \Rightarrow p$, con lo que concluímos que

$$[(p \vee q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)] \Longrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)].$$

b) (1.5 ptos.) Determine el valor de verdad de la siguiente proposición justificando adecuadamente su respuesta:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2 + 1$$

Solución: Veamos que la proposición es falsa. Como es un cuantificador universal, debemos mostrar un contraejemplo: En este caso, si $x = 0$ entonces es claro que no hay un real y tal que $0 = y^2 + 1$, pues implicaría que $y^2 = -1$

[puntaje: 0.5 puntos por señalar que se debe buscar un contraejemplo, 0.5 por encontrar un contraejemplo correcto (cualquier valor de x que sea menor que 1 sirve) y 0.5 por mostrar formalmente que el valor no cumple lo señalado en la proposición].

c) (1.5 ptos.) Encuentre la negación de la proposición de la parte *b*).

Solución: Debemos escribir la proposición

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2 + 1}$$

Esto, por propiedad de negación de cuantificador universal, es equivalente a [0.5 puntos.]

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \overline{\exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2 + 1}$$

Que a su vez, por propiedad de negación de cuantificador existencial, es equivalente a [0.5 puntos.]

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, \overline{x = y^2 + 1}$$

reemplazando la negación [0.5 puntos.]:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x \neq y^2 + 1$$

P2. *a*) (3 ptos.) Demuestre por inducción que para todo número natural n se tiene que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

Solución:

Definamos la función proposicional $p(n) : \exists k \in \mathbb{N}, 3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k$. Queremos demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$.

Caso base: Veamos que se tiene para $n = 0$. Claramente existe $k = 1$ tal que $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 3^2 + 2^1 = 11 = k * 11$. [0.5 puntos.]

Supongamos entonces como hipótesis de inducción que $p(n)$ es verdadero para un $n \in \mathbb{N}$ y mostremos con ello que $p(n+1)$ también es verdadero [0.5 puntos.].

Es decir suponemos que existe k tal que $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k$. Debemos demostrar que existe k' tal que $3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 11k'$.

Si definimos $s(n) = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ tenemos que $s(n+1) = 3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1}$
$= 9 * 3^{2n+2} + 64 * 2^{6n+1}$
$= (11 - 2) * 3^{2n+2} + (66 - 2) * 2^{6n+1}$ [0.5 puntos.]
$= 11 * 3^{2n+2} - 2 * 3^{2n+2} + 11 * 6 * 2^{6n+1} - 2 * 2^{6n+1}$
$= 11 * (3^{2n+2} + 6 * 2^{6n+1}) - 2 * (3^{2n+2} + 2^{6n+1})$

$= 11 * (3^{2n+2} + 6 * 2^{6n+1}) - 2 * 11 * k$ [1 punto por integrar hip. de inducción]
Es decir existe $k' = 3^{2n+2} + 6 * 2^{6n+1} - 2k$ tal que $s(n+1) = 11 * k'$ [0.5 puntos. por concluir correctamente].

b) (3 ptos.) Considere la siguiente fórmula de recurrencia:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \ n = 0 \\ a_{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} & \text{si } \ n \geq 1 \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para todo número natural n se tiene que $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Solución:
Definamos la función proposicional $p(n) : a_n = \frac{1}{n+1}$. Queremos demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$. El caso base $p(0)$ es cierto pues $a_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$ [1 punto].
Supongamos entonces como hipóteis de inducción que $p(n)$ es verdadero para un $n \in \mathbb{N}$ y mostremos con ello que $p(n+1)$ también es verdadero [0,5 puntos].
debemos demostrar que $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$. Pero $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ $= \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}(\frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+2}\frac{n+2-1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$ [1 punto.]
Se concluye que $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$ con lo que se demuestra la proposición [0.5 puntos por concluir].

TIEMPO: 1 hora y 15 minutos.
No olvidar anotar su nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.