Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2024.
Sábado 6 de Abril

PAUTA DEL CONTROL 1

P1. *a*) (3 ptos.) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s si se sabe que la siguiente proposición es falsa

$$\overline{[(s \Longleftrightarrow \bar{q}) \Longrightarrow \bar{r}]} \Longrightarrow [(p \vee q) \wedge r].$$

Solución

Primera forma: La única manera de que la implicancia sea falsa es que $\overline{[(s \Longleftrightarrow \bar{q}) \Longrightarrow \bar{r}]}$ sea verdadera y $(p \vee q) \wedge r$ sea falsa **0.6 ptos.**
Ahora, $\overline{[(s \Longleftrightarrow \bar{q}) \Longrightarrow \bar{r}]}$ es verdadera si y solo si $(s \Longleftrightarrow \bar{q}) \Longrightarrow \bar{r}$ es falsa, lo que, al ser una implicancia, equivale a que $s \Longleftrightarrow \bar{q}$ es verdadera y $\bar{r}$ es falsa. **0.6 ptos.**
Concluimos que r es verdadera y, como $(p \vee q) \wedge r$ es falsa, se tiene que $p \vee q$ es falsa **0.6 ptos.**, de donde se obtiene que tanto p como q son falsas. **0.6 ptos.**
Finalmente, como $s \Longleftrightarrow \bar{q}$ es verdadera y q es falsa, concluimos que s es verdadera. **0.6 ptos.**

Segunda forma: Notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{[(s \Leftrightarrow \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}]} \Rightarrow [(p \vee q) \wedge r] \quad &\Leftrightarrow \quad [(s \Leftrightarrow \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}] \vee [(p \vee q) \wedge r] \quad && \textbf{0.6 ptos.}\\
&\Leftrightarrow \quad [\overline{s \Leftrightarrow \bar{q}} \vee \bar{r}] \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad && \textbf{0.6 ptos.}\\
&\Leftrightarrow \quad (s \wedge q) \vee (\bar{s} \wedge \bar{q}) \vee \bar{r} \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) && \textbf{0.6 ptos.}
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que la proposición es falsa es equivalente a que las proposiciones $s \wedge q$, $\bar{s} \wedge \bar{q}$, $\bar{r}$, $p \wedge r$ y $q \wedge r$ sean falsas **0.6 ptos.** Así, se obtiene que $r \Leftrightarrow V$, $p \Leftrightarrow F$, $q \Leftrightarrow F$ y $s \Leftrightarrow V$ **0.6 ptos.**

Tercera forma: Hacer la tabla de verdad y concluir que la única combinación de valores de verdad que hace que la proposición sea falsa es $p \Leftrightarrow F$, $q \Leftrightarrow F$, $r \Leftrightarrow V$ y $s \Leftrightarrow F$. En este caso, asignar **0.5 ptos.** si hizo la tabla mal y no explicó que quería hacer, **1 pto.** si hizo la tabla mal pero explicó que quería obtener una única combinación de valores de verdad que hiciera la proposición falsa y **3 ptos.** si hizo la tabla bien y concluyó los valores de verdad de allí.

b) (3 ptos.) Sean p, q y r proposiciones. Demuestre, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una tautología.

$$\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee r} \Longrightarrow (r \Longrightarrow p).$$

Solución

Primera forma: Por contradicción. Asumimos que $\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee r}$ es verdadera y que $r \Longrightarrow p$ es falsa **1 pto.** Lo anterior equivale a que $(\overline{p} \wedge q) \vee r$ es falsa, r es verdadera y p es falsa **1 pto.** Esto a su vez, equivale a que $\overline{p} \wedge q$ es falsa, r es falsa, r es verdadera y p es falsa **1 pto.** Aquí llegamos a la contradicción $r \wedge \bar{r}$.

Segunda forma: Demostración simbólica. Usamos la caracterización de la implicancia, la asociatividad de $\vee$ y el tercio excluso:

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee r} \Longrightarrow (r \Longrightarrow p) &\iff [(\overline{p} \wedge q) \vee r] \vee (r \Longrightarrow p) \quad \textbf{0,6 ptos.} \\
&\iff (\overline{p} \wedge q) \vee r \vee (\bar{r} \vee p) \quad \textbf{0,6 ptos.} \\
&\iff (\overline{p} \wedge q) \vee (r \vee \bar{r}) \vee p \quad \textbf{0,6 ptos.} \\
&\iff (\overline{p} \wedge q) \vee V \vee p \quad \textbf{0,6 ptos.} \\
&\iff V \quad \textbf{0,6 ptos.}
\end{aligned}$$

Tercera forma: Demostración directa. Notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee r} &\iff \overline{(\overline{p} \wedge q)} \wedge \bar{r} \\
&\iff (p \vee \bar{q}) \wedge \bar{r} \qquad \textbf{1 pto.}
\end{aligned}$$

Asumiendo $\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee r}$ como verdadera y usando la equivalencia anterior concluimos que $p \vee \bar{q}$ y $\bar{r}$ son verdaderas **1 pto.** Esto implica que r es falsa y por lo tanto $r \Longrightarrow p$ es verdadera **1 pto.**

Cuarta forma: Demostración exploratoria.

Caso 1: r es verdadera. En este caso, $(\overline{p} \wedge q) \vee r$ es verdadera y por lo tanto, $\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee r}$ es falsa, quedando la proposición del tipo $F \Longrightarrow (V \Longrightarrow p)$ la cual es verdadera por definición de la implicancia **1,5 ptos.**
Caso 2: r es falsa. En este caso, obtenemos, por definición de la implicancia, que $r \Longrightarrow p$ es verdadera y la proposición queda $\overline{(\overline{p} \wedge q) \vee F} \Longrightarrow V$, lo cual es verdadero **1,5 ptos.**

P2. *a*) (2,5 ptos.) Escriba la negación y determine el valor de verdad de la siguiente proposición (recuerde que $\mathbb{Q}$ denota al conjunto de los números racionales):

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q},\ x \cdot y = 1 \ \vee\ x^2 + y^2 = 2.$$

Solución

La negación es

$$\exists x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q},\ x \cdot y \neq 1 \ \wedge\ x^2 + y^2 \neq 2$$ **1 pto.**

La proposición original es falsa pues su negación es verdadera ya que existe $x = 0 \in \mathbb{Q}$ tal que, para todo $y \in \mathbb{Q}$, se tiene que $x \cdot y = 0 \neq 1 \wedge x^2 + y^2 = y^2 \neq 2$, la última desigualdad debido a que $\sqrt{2}$ no es racional **1,5 ptos.**

b) (3,5 ptos.) Demuestre usando inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.

Solución

Definimos la función proposicional $P(n)$: "$2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9" y procedemos por inducción para demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es verdadera.

- *Caso base.* $P(0) : 2^{2\cdot 0} - 3\cdot 0 - 1 = 0$ es divisible por 9 es verdadera pues 0 es divisible por cualquier número **0.5 ptos.**
- *Hipótesis de inducción (H.I.)* Es cierto, para n, $P(n)$, es decir, $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.
- Por demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, $2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1$ es divisible por 9 Veamos,

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^{2n+2} - 3n - 3 - 1 \quad \textbf{0.5 ptos.}\\
&= 4 \cdot 2^{2n} - 3n - 4\\
&= 4 \cdot (2^{2n} - 3n - 1 + 3n + 1) - 3n - 4 \quad \textbf{1 pto.}\\
&= 4 \cdot (2^{2n} - 3n - 1) + 4 \cdot (3n + 1) - 3n + 4\\
&= 4 \cdot (2^{2n} - 3n - 1) + 9n \quad \textbf{0,8 ptos.}
\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9, y como la suma de números divisibles por 9 también lo es, se tiene que $P(n+1)$ es verdadera y así, por inducción, concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo natural n. **0.7 ptos.**

Otra forma de realizar el paso inductivo sería

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^{2n+2} - 3n - 3 - 1 \quad \textbf{0.5 ptos.}\\
&= 4 \cdot 2^{2n} - 3n - 4\\
&= (3+1)2^{2n} - 3n - 1 - 3\\
&= 2^{2n} - 3n - 1 + 3 \cdot 2^{2n} - 3\\
&= 2^{2n} - 3n - 1 + 3(2^{2n} - 1) \quad \textbf{1 pto.}
\end{aligned}$$

Demostrar que $2^{2n} - 1$ es divisible por 3 vale **1 pto.**, esto lo pueden hacer por inducción o bien usando la factorizazión estándar del binomio $(n \geq 1)$ $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$ con $x = 4$ para obtener que $2^{2n} - 1 = 4^n - 1 = 3(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1})$. Se concluye que $3(2^{2n} - 1)$ es divisible por 9. Así, existen enteros α y β tales que

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^{2n} - 3n - 1 + 3(2^{2n} - 1)\\
&\overset{H.I.}{=} 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

y por lo tanto $P(n+1)$ es verdadera. Luego, por inducción se obtiene que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ es verdadera **0.5 ptos.**