FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 1, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2021/2 (11 de Septiembre)

P.1. (a) **(2 pts.)** Demuestre que la función $f(x) = e^x \cos(x) + 1$ tiene infinitas raíces reales positivas.
Ind: conviene evaluar la función en los puntos de la forma $n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Si $x = n\pi$, se tiene que $f(x) = e^{n\pi}(-1)^n + 1$. Así, si n es par, $f(n\pi) > 0$ 0.4p

Si n es impar, $f(n\pi) = 1 - e^{n\pi} < 0$. 0.4p

Por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N}$, la función tiene un cambio de signo estricto entre $n\pi$ y $(n+1)\pi$. 0.2p

Cómo f es continua en $[n\pi, (n+1)\pi]$, por álgebra de funciones continuas,... 0.5p

en virtud del teorema de Bolzano o de las raíces, existe $\bar{x}_n \in (n\pi, (n+1)\pi)$ tal que $f(x_n) = 0$. 0.3p

Cómo lo anterior es válido $\forall n \in \mathbb{N}$, se deduce que las raíces de f son infinitas. 0.2p

(b) **(2 pts.)** Sea g una función continua en $[a, b]$, donde $a < b$, y tal que

$$0 < g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Demuestre que existe $k > 0$ tal que

$$k < g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Ind: piense en el acotamiento de g.

Solución: Cómo g es continua en el cerrado y acotado $[a, b]$, alcanza su mínimo (y también su máximo) en $[a, b]$. 0.5p

Es decir, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que

$$g(\bar{x}) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

0.5p

Pero $g(\bar{x}) > 0$, por lo tanto, tomando $k = g(\bar{x})/2$ se tiene que $k > 0$ y satisface lo pedido. 1.0p

(c) **(2 pts.)** Demuestre, usando la definición, que la función $h(x) = \sqrt{3x+6}$ es uniformemente continua en $[1, \infty)$.

Solución:

$$PDQ : \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x_1, x_2 \in [1, \infty) \left[|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow \left| \sqrt{3x_1 + 6} - \sqrt{3x_2 + 6} \right| \leq \varepsilon \right]$$

0.5p

Sabemos que si $|x_1 - x_2| \leq \delta$:

$$\left|\sqrt{3x_1+6} - \sqrt{3x_2+6}\right| = \frac{3|x_1-x_2|}{\sqrt{3x_1+6}+\sqrt{3x_2+6}} \leq \frac{|x_1-x_2|}{2} \leq \frac{\delta}{2}$$

[Se pueden hacer otros acotamientos permitidos, como por ejemplo 3δ al acotar el denominador por 1]

1.0p

Por lo tanto, si se toma $\delta = 2\varepsilon$ se obtiene el resultado pedido.

0.5p

P.2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in (-1,0)\cup(0,1) \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) **(3 pts.)** Demuestre que f es continua y derivable en $\bar{x} = 0$.

Solución: Basta con probar que f es derivable en $\bar{x} = 0$, ya que derivable implica continua.

1.5

Veamos:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1-h)}{\ln(1+h)} + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1-h)+\ln(1+h)}{h\ln(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1-h^2)}{h\ln(1+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1-h^2)}{h^2}}{\dfrac{\ln(1+h)}{h}} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned}$$

1.5

Esto prueba que f es derivable en $\bar{x} = 0$ y que $f'(0) = -1$.

(b) **(2 pts.)** Calcule $f'(x)$ para $x \in (-1,0)\cup(0,1)$.

Solución: Para $x \in (-1,0)\cup(0,1)$ se tiene que

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}\right)' = \frac{\frac{-1}{1-x}\cdot\ln(1+x) - \ln(1-x)\cdot\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}$$

[0.5=cuociente + 0.5*2=ln'+0.5 cadena:$(1-x)' = -1$]

2.0pt

Es decir:

$$f'(x) = -\frac{(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)}{(1-x^2)\ln^2(1+x)}$$

(c) **(1 pt.)** Escriba explícitamente cuál limite se debe calcular (no lo calcule, ya que no hay tiempo), y cuanto debería valer para concluir que f' es continua en $\bar{x} = 0$.

Solución: Se debe calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \;=\; \lim_{x\to 0} -\frac{(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)}{(1-x^2)\ln^2(1+x)}$$

0.5pt

que debe ser igual a

$$= \; f'(0) = -1.$$

0.5pt

Ind: en todo este problema puede ser útil recordar que $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2} = 1.$