Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Álgebra. Otoño 2024.

CONTROL 6 (inasistencias con PAUTA)

P1. *a*) (3 ptos.) Demuestre que para todo $z = R \cdot e^{i \cdot \theta} \in \mathbb{C}$,

$$z^7 = \overline{z}^7 \iff R = 0 \vee \left(e^{i\cdot\theta}\right)^{14} = 1.$$

Solución

$$z^7 = \overline{z}^7 \iff R^7 \cdot e^{i\cdot 7\theta} = R^7 \cdot e^{i\cdot(-7\theta)}$$

(propiedades de conjugados y potencias en polares, **0.8 ptos.**)

$$\iff R^7 = 0 \vee e^{i\cdot 7\theta} = e^{i\cdot(-7\theta)}$$

(sólo se puede cancelar R^7 si es no nulo, **0.7 ptos.**)

$$\iff R = 0 \vee e^{i\cdot 14\theta} = 1$$

(propiedades de los reales y del producto en polares, **0.8 ptos.**)

$$\iff R = 0 \vee \left(e^{i\cdot\theta}\right)^{14} = 1$$

(propiedades de potencias en polares, **0.7 ptos.**)

b) (3 ptos.) Demuestre que el conjunto de las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $z^7 = \overline{z}^7$ es

$$\bigcup_{k=0}^{13} \left\{ R \cdot e^{i\cdot k \cdot \frac{\pi}{7}} \mid R \in \mathbb{R} \wedge R \geq 0 \right\}.$$

Solución

De la parte *a*), $z = R \cdot e^{i\cdot\theta}$ es solución de la ecuación ssi alguna de las siguientes dos condiciones se cumple: i) Su módulo R es 0, o bien ii) $e^{i\cdot\theta}$ es una raíz 14-ésima de la unidad (y en este caso no hay restricción para el módulo). (**0.7 ptos.**) En ii), como conocemos las raíces n-ésimas de la unidad (con $n = 14$ en este caso), se tiene que $e^{i\cdot\theta} = \left(e^{i\cdot\frac{2\pi}{14}}\right)^k = e^{i\cdot k\cdot\frac{\pi}{7}}$, $k = 0, 1, \ldots, 13$. (**0.8 ptos.**)
Con esto, las soluciones z de la ecuación serán de la forma $R \cdot e^{i\cdot k\cdot\frac{\pi}{7}}$, dónde el módulo R de z puede ser cualquier real mayor o igual a 0 (el caso $R = 0$ de i) queda entonces también incorporado), y k varía entre 0 y 13. (**0.7 ptos.**)
La colección de todos estos valores posibles de z se puede desagregar en términos de k, es decir escribir como la unión de cada una de las subcolecciones para cada k fijo entre 0 y 13, lo que entrega la unión requerida. (**0.8 ptos.**)

P2. *a*) (3 ptos.) Considere el anillo $(S, +, \cdot)$, donde $S = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2 \,|\, f \text{ función}\}$, y si $f, g \in S$ entonces $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ y $f \cdot g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ se definen mediante

$$(f + g)(n) := f(n) +_2 g(n), \ \text{ y } \ (f \cdot g)(n) = f(n) \cdot_2 g(n).$$

Demuestre que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ definida mediante

$$f(n) = \begin{cases} [0]_2, & \text{si } n \text{ es par} \\ [1]_2, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es un divisor de cero en S. [**Ayuda:** La función $0_S : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ dada por $0_S(n) = [0]_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ es el neutro para $+$ en S, es decir, el "cero" de S.]

Solución

Notar que $f \neq 0_S$. **0.5 ptos.** Se pide encontrar $g \neq 0_S$ tal que $f \cdot g = 0_S$, donde 0_S es la función constante igual a $0_R = [0]_2$. Consideramos la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ dada por

$$g(n) = \begin{cases} [0]_2, & \text{si } n \text{ es impar} \\ [1]_2, & \text{si } n \text{ es par.} \ \ \textbf{1 pto.} \end{cases}$$

Claramente $g \neq 0_S$. **0.5 ptos.** La función $f \cdot g$ está dada por

$$(f \cdot g)(n) = \begin{cases} [0]_2 \cdot [1]_2, & \text{si } n \text{ es par} \\ [1]_2 \cdot [0]_2, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} = \begin{cases} [0]_2, & \text{si } n \text{ es par} \\ [0]_2, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

es decir, $f \cdot g = 0_S$ y por lo tanto, f es divisor de cero en S. **1 pto.**

b) (3 ptos.) Considere el grupo $(S, +)$ asociado al anillo $(S, +, \cdot)$ del inciso anterior y el grupo $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), +)$, donde $A + B := A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Demuestre que la función $\varphi : S \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, definida mediante

$$\varphi(f) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = [1]_2\},$$

es un homomorfismo de grupos.

Solución

φ es homomorfismo de grupos si y solo si, para todo $f, g \in S$, se tiene que $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$. Veamos:
$\varphi(f+g) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) +_2 g(n) = [1]_2\}$. Como la única forma de que $f(n) +_2 g(n) = [1]_2$ es que $(f(n) = [1]_2 \wedge g(n) = [0]_2) \vee (f(n) = [0]_2 \wedge g(n) = [1]_2)$ **1 pto.**, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(f+g) &= \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) +_2 g(n) = [1]_2\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = [1]_2 \wedge g(n) = [0]_2\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = [0]_2 \wedge g(n) = [1]_2\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \in \varphi(f) \setminus \varphi(g)\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \in \varphi(g) \setminus \varphi(f)\} \quad \textbf{1 pto.} \\ &= \varphi(f) \setminus \varphi(g) \cup \varphi(g) \setminus \varphi(f) = \varphi(f) \Delta \varphi(g) = \varphi(f) + \varphi(g) \quad \textbf{1 pto.} \end{aligned}$$