



CONTROL 5

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la/s hipótesis.

P1.- (70 %) Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a + d = b + c$$

- a) **(2.0)** Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
- b) **(1.0)** Calcule $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$, $[(0, 2)]_{\mathcal{R}}$ y $[(2, 0)]_{\mathcal{R}}$.
- c) Sean $a, b \in \mathbb{N}$.
 - c.1) **(0.5)** Demuestre que si $a \leq b$, entonces $(a, b)\mathcal{R}(0, b - a)$.
 - c.2) **(0.5)** Demuestre que si $a \geq b$, entonces $(a, b)\mathcal{R}(a - b, 0)$.
- d) Sea $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ el conjunto cuociente de la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} [(n, 0)]_{\mathcal{R}} & n \geq 0 \\ [(0, -n)]_{\mathcal{R}} & n < 0 \end{cases}$$

Se sabe (no es necesario que lo demuestre) que esta función es inyectiva.

- d.1) **(1.5)** Demuestre que la función f es epiyectiva.
- d.2) **(0.5)** Concluya que el conjunto cuociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ es numerable.

P2. (30 %) Sea $A = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20\}$.

- a) **(3.0)** Calcule el cardinal del conjunto

$$\mathcal{X} = \{B \subseteq A: (|B| = 5) \wedge (1 \in B)\}$$

- b) **(3.0)** Calcule el cardinal del conjunto

$$\mathcal{Y} = \{B \subseteq A: (|B| = 5) \vee (1 \in B)\}$$

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

No olvidar anotar su nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.