



CONTROL 5

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos; si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique la/s hipótesis.

P1. (60 %)

Sea $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ la ley de composición interna por

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (a, b) \Delta (c, d) = (ad + cb, bd).$$

- a) (1,5 ptos.) Demuestre que Δ es conmutativa.
- b) (1,5 ptos.) Encuentre el neutro para Δ .
- c) (1,5 ptos.) Encuentre el conjunto de elementos invertibles para Δ con sus respectivos inversos.
- d) (1,5 ptos.) Pruebe que la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ definida mediante $f(a, b) = \frac{a}{b}$ es un homomorfismo epiyectivo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \Delta)$ en $(\mathbb{Q}, +)$.

P2. (40 %)

- a) (3 ptos.) Sea $a > 0$ un número real positivo. Demuestre que el conjunto

$$\sqrt{a}\mathbb{N} = \{\sqrt{a} \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

es numerable.

- b) (3 ptos.) Demuestre que el conjunto

$$A = \{x \cdot n \mid x \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

es numerable.

TIEMPO: una hora y 30 minutos

No olvidar anotar su nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.