Control 3

P1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por $f(n) = n/2$ si n es par, y $f(n) = n - 1$ si n es impar.

a) **(2 ptos.)** Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(\{0, 1, \ldots, n\}) \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$.

b) **(2 ptos.)** Para cada número IMPAR $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $f^{-1}(\{n\}) = \{2n\}$.

c) **(2 ptos.)** Demuestre que $f^{-1}(\{\ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar }\}) = \{2n \mid n \text{ es un número natural impar}\}$.

P2. Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ definida por $(a, b)\mathcal{R}(x, y) \iff a \cdot y = b \cdot x$, para cada par de elementos $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

a) **(2 ptos.)** Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) **(2 ptos.)** Demuestre que para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$[(a, b)]_{\mathcal{R}} = \{(\lambda a, \lambda b) \colon \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

c) **(2 ptos.)** Demuestre que la función $g : \mathbb{R}^* \to (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)/\mathcal{R}$ definida por $g(x) = [(1, x)]_{\mathcal{R}}$ es epiyectiva.

Duración: 1h y 15 minutos.