

Control 2

P1. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$(m, n)\mathcal{R}(r, s) \iff m + s = n + r.$$

- a) (2.5 ptos.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- b) (0.5 ptos.) Describa los elementos de las clases de equivalencia $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$, $[(0, 1)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1, 0)]_{\mathcal{R}}$.
- c) (3.0 ptos.) Demuestre que el conjunto cociente es:

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R} = \{[(0, n)]_{\mathcal{R}} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(n, 0)]_{\mathcal{R}} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

P2. a) (1.0 pto.) Muestre que $\sum_{k=0}^{523} \binom{523}{k} (-2)^k = -1$.

b) (1.5 ptos.) Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)}$.

c) Sea $J = \{[a, b] \subseteq \mathbb{R} : \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{N}, \sqrt{b} = \sqrt{a} + 1\}$.

- i) (2.0 ptos.) Demuestre que J es numerable.
- ii) (1.5 ptos.) Definimos la relación $\mathcal{R}$ en J como

$$[a, b]\mathcal{R}[c, d] \iff c \leq a.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

P3. Para $i \in \mathbb{N}$, sea $B_i = \{(i, 1), (i, 2), \dots, (i, i)\}$.

a) (2.0 ptos.) Muestre que $|B_i| = i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y luego determine $\left| \bigcup_{i=0}^n B_i \right|$, para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1.0 pto.) Determine si $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ es igual a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Tenga en cuenta que $0 \in \mathbb{N}$.

c) (1.5 ptos.) Determine $|\mathcal{P}(B_i) \times B_4|$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

d) (1.5 ptos.) Sea $f : B_{10} \rightarrow \{11, 12, 13, \dots, 20\}$ una función inyectiva. ¿Es f biyectiva?

Duración: 3 horas.

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente.