FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 2, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2021/2 (6 de Noviembre)

P.1. (a) Considere la función $f(x) = x\int_0^x e^{-t^2}dt.$

(i) **(2 pts.)** Calcule $f'(x)$ y encuentre intervalos de crecimiento, máximos y mínimos de f (si los hay).

(ii) **(2 pts.)** Calcule $f''(x)$ y encuentre intervalos de convexidad y de concavidad. Encuentre (si los hay) todos los puntos de inflexión.

(b) **(2 pts.)** Sean g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$ que satisface $g(0) = g'(0) = 0$ y $a > 0$. Aplique el TVM a la función auxiliar $h(x) = g(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 g(a)$ y su derivada para demostrar que $\exists \xi \in (0, a)$ tal que $\frac{a^2}{2}g''(\xi) = g(a)$.

P.2. (a) **(4 pts.)** Considere la función $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Encuentre $n \in \mathbb{N}^*$ y funciones escalonadas $e^-, e^+\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ asociadas a la partición $P = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{2n}{n}\}$, tales que: $e^-(x) \leq f(x) \leq e^+(x)$ para todo $x \in [0, 2]$ y

$$\int_0^2 (e^+ - e^-) \leq 10^{-3}$$

(b) **(2 pts.)** Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \sin^{n+2}(x) = \frac{-1}{n+2}\cos(x)\sin^{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2}\int \sin^n(x)dx$$

Tiempo de Trabajo: 2 horas