

Control 2, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral Semestre 2021/2 (6 de Noviembre)

Recuerde que: las evaluaciones del curso son de carácter estrictamente individual. Nuestra Escuela y Universidad cuenta con normas de convivencia y reglamentos que aplican a todas las actividades académicas en cualquier formato y soporte en que se realicen. Ustedes al ingresar a la Universidad de Chile adhieren a los valores y principios contenidos en estas normas y reglamentos y es su deber como estudiantes de esta comunidad el conocerlas y respetarlas.

En particular, se recuerda que el Título II del Código de Ética da la FCFM (versión revisada 2020) señala lo siguiente en su punto c): "La responsabilidad y la honestidad se expresan en el compromiso con el estudio y la rendición de evaluaciones a lo largo de la vida estudiantil, así como en la realización de la investigación y la docencia. En este sentido, los miembros de la comunidad se comprometen a no realizar actos contrarios a dichos valores como, por ejemplo, copiar, plagiar, falsificar documentos, suplantar la identidad de terceros en todas las actividades evaluativas y de producción de conocimiento que realicen, entre otras. Asimismo, se comprometen a no recurrir a ningún medio físico o virtual que posibilite dichos comportamientos impropios."

P.1. (a) Considere la función $f(x) = x \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (i) (2 pts.) Calcule $f'(x)$ y encuentre intervalos de crecimiento, máximos y mínimos de f (si los hay).
- (ii) (2 pts.) Calcule $f''(x)$ y encuentre intervalos de convexidad y de concavidad. Encuentre (si los hay) todos los puntos de inflexión.

(b) (2 pts.) Sean g una función dos veces derivable en \mathbb{R} que satisface $g(0) = g'(0) = 0$ y $a > 0$.

Aplique el TVM a la función auxiliar $h(x) = g(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 g(a)$ y su derivada para demostrar que $\exists \xi \in (0, a)$ tal que $\frac{a^2}{2} g''(\xi) = g(a)$.

P.2. (a) (4 pts.) Considere la función $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Encuentre $n \in \mathbb{N}^*$ y funciones escalonadas $e^-, e^+: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ asociadas a la partición $P = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \dots, \frac{2n}{n}\}$, tales que: $e^-(x) \leq f(x) \leq e^+(x)$ para todo $x \in [0, 2]$ y

$$\int_0^2 (e^+ - e^-) \leq 10^{-3}$$

(b) (2 pts.) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \sin^{n+2}(x) dx = \frac{-1}{n+2} \cos(x) \sin^{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2} \int \sin^n(x) dx$$