Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Primavera 2025 - Control 1
Septiembre 27, 2025

P1. (a) Considere el sistema lineal dado por

$$\begin{aligned} x_1 - \ \ x_2 + 0x_3 - \ \ x_4 &= 2 \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 &= 3 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 + \gamma x_4 &= \beta + 3 \end{aligned}$$

donde γ, β son parámetros reales. Encuentre todas las condiciones sobre γ y β de modo que el sistema

I) (1.5 puntos) No tenga solución.

II) (1.5 puntos) Tenga infinitas soluciones.

III) (1.5 puntos) Tenga solución única.

(b) (1.5 puntos) Decida si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es invertible, y de serlo calcule su inversa.

P2. (a) Considere el subconjunto $U \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \left\{ v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a + b - c - d = 0 \ \wedge \ a - b - c - d = 0 \right\}.$$

I) (1.5 puntos) Pruebe que U es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

II) (1.5 puntos) De una base de U y calcule la dimensión de U.

(b) (3 puntos) Supongamos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y que $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. Para $a \in \mathbb{R}$ considere el conjunto $\mathcal{A} = \{v_1 + av_2, av_1 + v_2\}$. Encuentre todos los valores de a de manera que $\mathcal{A}$ sea linealmente dependiente.

P3. (a) (2 puntos) Una matriz $U \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice que es *especial* si $U^2 = \mathbb{I}_n$, donde $\mathbb{I}_n$ es la matriz identidad. Supongamos que $U, V \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ son matrices especiales y que además conmutan: $UV = VU$. Entonces, pruebe que UV es especial.

Para que valores de a, b la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

es especial.

(b) (2 puntos) Suponga que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ satisface que $B = A^2$ es invertible. Pruebe que si $x \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ entonces necesariamente $x = 0$. Justifique que A es invertible.

(c) (2 puntos) Supongamos que V y W son subespacios vectoriales de U. Supondremos que las dimensiones de U, V, W son todas impares. Pruebe que U no puede ser la suma directa de V y W.

Tiempo del control 3 horas.