Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra MA1101-2024-2

Control 1

P1. *a)* Sean p, q y r tres proposiciones. Considere la proposición lógica dada por:

$$[(p \implies (\overline{r} \implies q)) \wedge \overline{q}] \implies (p \implies r)$$

i) (2.0 ptos.) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que es una tautología.

ii) (1.0 pto.) Demuestre, a través de un contraejemplo, que no se tiene la equivalencia. Para ello, presente valores de verdad de p, q y r para los que la implicancia hacia la izquierda no es verdadera.

b) Sea T_n una secuencia definida por recurrencia como $T_1 = 1$, $T_2 = 1$ y $T_n = n - T_{n-1} - T_{n-2}$, para $n \geqslant 3$.

i) (1.0 pto.) Pruebe de manera algebraica que $T_{n+3} = 1 + T_n$, para todo $n \geqslant 1$.

ii) (2.0 ptos.) Demuestre por inducción en k que

$$T_{3k-2} = T_{3k-1} = T_{3k} = k, \text{ para todo } k \geqslant 1.$$

Indicación: Puede usar el resultado anterior incluso si no lo ha probado.

P2. *a)* (1.5 ptos.) Demuestre que, para todo $n \geqslant 1$, el conjunto $\{0,1\}^n \cap \{1,2\}^n$ tiene exactamente un elemento y determine cuál es.

b) (1.5 ptos.)
Determine si lo siguiente es verdadero para todos conjuntos $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ (donde los complementos se toman con respecto a $\mathbb{N}$):

$$A \cup C^c = (C \setminus (A \cup B))^c.$$

Justifique su respuesta.

c) (3.0 ptos.) Sea E el conjunto universo y considere $B \subseteq E$. Sea $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ la función dada por

$$f(A) = A^c \triangle B.$$

Demuestre que

$$f^{-1}(\mathcal{P}(B)) = \{A \subseteq E : B^c \subseteq A\}$$

donde $f^{-1}(\mathcal{P}(B))$ es el conjunto preimagen de $\mathcal{P}(B)$ bajo f.

P3. *a)* Sea E conjunto universo y sea $A \subseteq E$ un conjunto fijo. Se define la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & X \triangle A \end{array}$$

i) (1.0 pto.) Demuestre que f es biyectiva.

ii) (1.0 pto.) Calcule f^{-1}.

b) Para todo $X \subseteq E$, se define su función indicatriz $I_X : E \to \{0,1\}$ como:

$$I_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin X \\ 1 & \text{si } x \in X \end{cases}$$

i) (1.5 ptos.) Sean A, B con $\emptyset \subsetneq B \subsetneq A \subsetneq E$. Demuestre que $I_{A \setminus B} = I_A - I_B$.

ii) (1.5 ptos.) Sean $A, Z \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Calcule $I_A(Z)$ en términos de A y Z.

iii) (1.0 pto.) Sea $A \subseteq E$ con $A \neq \emptyset$. Calcule $I_A^{-1}(\{y\})$ para $y \in \{0,1\}$.

Duración: 3 horas.

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos. Si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente.