FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 1, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2021/2 (11 de Septiembre)

Recuerde que: las evaluaciones del curso son de carácter estrictamente individual. Nuestra Escuela y Universidad cuenta con normas de convivencia y reglamentos que aplican a todas las actividades académicas en cualquier formato y soporte en que se realicen. Ustedes al ingresar a la Universidad de Chile adhieren a los valores y principios contenidos en estas normas y reglamentos y es su deber como estudiantes de esta comunidad el conocerlas y respetarlas.

En particular, se recuerda que el Título II del Código de Ética da la FCFM (versión revisada 2020) señala lo siguiente en su punto c): "La responsabilidad y la honestidad se expresan en el compromiso con el estudio y la rendición de evaluaciones a lo largo de la vida estudiantil, así como en la realización de la investigación y la docencia. En este sentido, los miembros de la comunidad se comprometen a no realizar actos contrarios a dichos valores como, por ejemplo, copiar, plagiar, falsificar documentos, suplantar la identidad de terceros en todas las actividades evaluativas y de producción de conocimiento que realicen, entre otras. Asimismo, se comprometen a no recurrir a ningún medio físico o virtual que posibilite dichos comportamientos impropios."

P.1. (a) **(2 pts.)** Demuestre que la función $f(x) = e^x \cos(x) + 1$ tiene infinitas raíces reales positivas.
Ind: conviene evaluar la función en los puntos de la forma $n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) **(2 pts.)** Sea g una función continua en $[a, b]$, donde $a < b$, y tal que

$$0 < g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Demuestre que existe $k > 0$ tal que

$$k < g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Ind: piense en el acotamiento de g.

(c) **(2 pts.)** Demuestre, usando la definición, que la función $h(x) = \sqrt{3x + 6}$ es uniformemente continua en $[1, \infty)$.

P.2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) **(3 pts.)** Demuestre que f es continua y derivable en $\bar{x} = 0$.

(b) **(2 pts.)** Calcule $f'(x)$ para $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

(c) **(1 pt.)** Escriba explícitamente cuál limite se debe calcular (no lo calcule, ya que no hay tiempo), y cuanto debería valer para concluir que f' es continua en $\bar{x} = 0$.

Ind: en todo este problema puede ser útil recordar que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1-h^2)}{-h^2} = 1.$

Tiempo de Trabajo: 2 horas