



Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-2, Coordinado.
Miércoles 8 de Octubre. Profesores: J. Boulanger, Sa. Martínez

CONTROL 2

P1. a) (3 pts) Considere la EDO

$$y'' - 5y' + 6y = 6x + 1.$$

- I) (1 pts) Encuentre la solución de la ecuación homogénea asociada.
- II) (1 pts) Encuentre una solución particular de la ecuación.
- III) (1 pts) Encuentre la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

b) (3 pts) Resuelva la EDO

$$x^3 y'''(x) - x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^3, \quad x > 0,$$

usando el cambio de variable $x = e^u$.

Ind. Demuestre que la función $z(u) = y(e^u)$ satisface una ecuación lineal con coeficientes constantes a determinar.

P2. a) Determine la solución general de la siguiente EDO:

$$xy'' - (4x + 1)y' + (4x + 2)y = 2x^2 e^x, \quad x > 0.$$

- I) (1 pts) Busque primero una solución de la ecuación homogénea de la forma $y_1(x) = e^{\lambda x}$, con λ a determinar.
- II) (1 pts) Use la fórmula de Liouville (método de reducción de orden) para establecer otra solución de la ecuación homogénea linealmente independiente la encontrada en la parte anterior.
- III) (1.5 pts) Use el método de variación de parametros para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea.
- IV) (0.5 pts) ¿Cuál es la solución general de la ecuación?

b) Considere la EDO:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

- I) (1 pts) Encuentre soluciones de la forma $y(x) = x^k$ para $k \in \mathbb{Z}$.
- II) (1 pts) Deduzca la solución general de la EDO en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Justifique.

Ind: Demuestre que las soluciones encontradas en I) son linealmente independientes.

P3. En esta pregunta estudiaremos las soluciones periódicas de la ecuación del oscilador con fuerza externa. Consideremos la ecuación

$$z'' + \omega^2 z = F(t), \tag{1}$$

con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y de período T_1 .

a) (1 pts) Justifique que las soluciones z de (1) se pueden expresar de la forma

$$z(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + y_p(t),$$

donde y_p es una solución particular de (1) que verifica $y_p(0) = y_p'(0) = 0$.

- b) (1 pts) Demuestre que una solución z de (1) tiene período T_1 (es decir $z(t) = z(t + T_1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$) $\iff z(0) = z(T_1)$ y $z'(0) = z'(T_1)$.

Ind.: Use el Teorema de Existencia y Unicidad considerando $w(t) = z(t + T_1)$.

- c) (1 pts) Use las preguntas a) y b) para probar que (1) tiene una única solución de período T_1 si $(1 - \cos(\omega T_1)) \neq 0$, es decir $T_1/T \notin \mathbb{Z}$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el período de las soluciones de la ecuación homogénea.
- d) (1 pts) Suponga que $T_1 = kT$ con $k \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si $y_p(kT) = y'_p(kT) = 0$ entonces todas las soluciones de (1) tienen período kT , y si $y_p(kT) \neq 0$ o $y'_p(kT) \neq 0$ entonces (1) no tiene soluciones de período kT .
- e) (2 pts) Pruebe que si $F(t) = \cos(3\omega t)$ entonces todas las soluciones de (1) son periódicas. ¿Qué período tienen las soluciones?.

Ind.: Puede resolver la ecuación usando el método que desee.

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.