Pauta Tarea 5

P1. Demuestre usando la definición de límite con $\varepsilon > 0$, que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

Utilice este resultado para hallar el límite $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

De la definición de límite, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \geq m,\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

$\longrightarrow$ 1.0 pt.

Luego tomando $u = \frac{1}{x}$, tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists m > 0,\ \forall \tfrac{1}{u} \geq m > 0,\ |f(\tfrac{1}{u}) - l| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \tfrac{1}{m} > 0,\ \forall u \in (0, \delta],\ |f(\tfrac{1}{u}) - l| < \varepsilon$$

$\longrightarrow$ 2.0 pts.

$$\iff \lim_{u\to 0^+} f(\tfrac{1}{u}) = l$$

$\longrightarrow$ 1.0 pt.

y como la variable es muda, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = l$.

Ahora para calcular $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ usamos lo anterior,

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

$\longrightarrow$ 2.0 pts.

P2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}}_{1} \cdot \underbrace{(x+1)}_{2}$$

$$= 2$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

Dar 0.6 pts. por amplificar por $(x+1)$ y 0.6 por identificar los límites conocidos y llegar al resultado.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})\cdot(1+\sqrt{1-x^2})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-x^{\cancel{2}})}{\cancel{x}(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{0}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{0}{2} = 0$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

Dar 0.6 por la amplificación y 0.6 por resolver el nuevo límite.

c) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

En primer lugar notemos que x^n-a^n es un polinomio divisible por $x-a$, ya que

$$x^n-a^n = (x-a)\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}$$

, lo que es sencillo de probar usando la suma geométrica para $\frac{a}{x}$.

$\longrightarrow$ 0.6 pts.

No es necesario que lo demuestren, pueden llegar y usarlo.

Luego,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} x^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{x}\right)^k$$

$$= a^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = a^{n-1}\cdot n$$

$$= n\, a^{n-1}$$

$\longrightarrow$ 0.6 pts.

d) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

ACÁ SE USA QUE EXP. ES CONTINUA, PERO NO ES NECESARIO EXPLICITARLO $\longrightarrow$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

Usando los c.v. $u = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+1$, $v = \frac{1}{x}$

$$= \exp\left(\underbrace{\lim_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{u-1}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{v\to 0} \frac{\operatorname{sen}(v)}{v}}_{1}\right)$$

$$= \exp(1) = e$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

Dar 0.3 por usar $\exp(\ln(\cdot))$, 0.3 por la amplificación por $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, y 0.6 por identificar límites conocidos y concluir.

e) $\displaystyle \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \exp\left(\frac{1}{1-x}\ln(x)\right) = \exp\Big(-\underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}}_{1}\Big)$$

$$= \exp(-1) = 1/e$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

Dar 0.6 por ocupar $\exp(\ln(\cdot))$ y 0.6 por ocupar el límite conocido y concluir.

P3. Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)}$$

Estudie la función f indicando sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas según corresponda, justificando con cálculos explícitos de los límites correspondientes. Complemente su análisis con un dibujo o una captura de pantalla del gráfico en Desmos.

Para estudiar las asíntotas verticales de f tenemos que ver si hay un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \pm\infty$. Como en $\bar{x} = 1$ el término $x-1$ se anula, esa es una potencial asíntota.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)} = \underbrace{\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1+e^x}}_{\frac{1}{1+e}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)} = \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1+e^x}}_{\frac{1}{1+e}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}}_{\to -\infty} = -\infty$$

Luego la recta $x = 1$ es asíntota vertical $\longrightarrow$ 1.0pt.

Basta que calculen 1 de los dos límites, pero es importante que justifiquen por qué toman el límite hacia $\bar{x} = 1$.

Para estudiar las asíntotas horizontales, debemos estudiar los límites hacia $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+e^x}}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1}}_{1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)} = \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1}}_{\to -\infty} = -\infty$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f hacia $+\infty$. Hacia $-\infty$ no hay asíntota horizontal. $\longrightarrow$ 2.0pts.

Para calcular asíntotas oblicuas de f, debemos encontrar una recta $y = mx + n$ que sea el límite de f cuando x tiende a $\pm\infty$. Como hacia $+\infty$ ya sabemos que es una asíntota horizontal, entonces sólo nos enfocaremos en $-\infty$.

Para calcular m hay que estudiar $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, y para calcular n hay que estudiar $\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{(1+e^x)(x-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1}}_{1} = 1$$

Luego $m=1$. $\longrightarrow$ 1.0 pt.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-1)} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x(1+e^x)(x-1)}{(1+e^x)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^x(x^2-x)}{(1+e^x)(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+e^x)-x^2e^x}{(1+e^x)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cancel{(1+e^x)}}{\cancel{(1+e^x)}(x-1)} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^x}{(1+e^x)(x-1)}$$

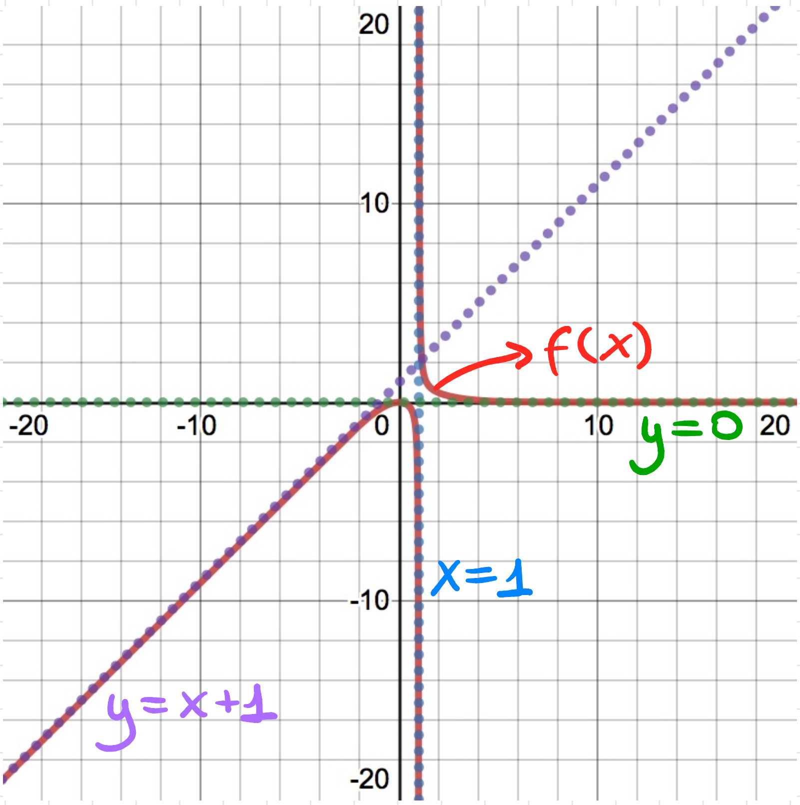
$$= \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1}}_{1} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x}}_{1} \cdot \lim_{x\to-\infty} xe^x \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1}}_{1}$$

$$= 1 - \lim_{x\to-\infty} xe^x = 1 + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}}_{0}$$

$$=1$$

Luego $n=1$, y por lo tanto la recta $y=x+1$ es asíntota oblicua hacia $-\infty$. $\longrightarrow$ 1.0 pt.

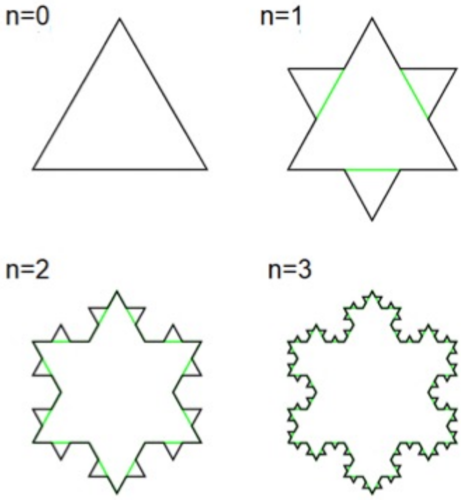
Finalmente la gráfica de f es:



$\longrightarrow$ 1.0 pt.

Es importante que en el gráfico muestren todas las asíntotas.

P4. El proposito de esta problema es calcular el límite del área de la siguiente figura generada por recurrencia. Llamemos A_n al área de la figura enésima, la figura de partida ($n = 0$) corresponde a un triángulo equilátero de lado a, por lo que $A_0 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Para $n \geq 1$, la figura n se obtiene añadiendo un triángulo extra en cada arista de la figura $n-1$. Estos triángulos añadidos tienen un lado igual al tercio de la arista donde se añade. Esta recursividad se describe en la siguiente figura:



Para calcular el valor al que tiende el área de la figura cuando n tiende a infinito siga los siguientes pasos:

a) Calcule el número de aristas que tiene una figura n.

Denotemos por e_n al número de aristas en el paso n.

Notemos que el paso $n=0$ es un triángulo ($e_0 = 3$), y luego como en cada paso se agrega un triángulo por arista, entonces cada una pasa a ser 4 aristas.

Por eso tenemos que

$$\begin{aligned} e_0 &= 3 \\ e_1 &= 3\cdot 4 \\ e_2 &= 3\cdot 4\cdot 4 \\ &\vdots \\ e_{n+1} &= e_n\cdot 4 \end{aligned}$$

Probaremos por inducción que $e_n = 3\cdot 4^n$.

$n=0$: $e_n = 3 = 3\cdot 1 = 3\cdot 4^0$ ✓

$n \Rightarrow n+1$: Supongamos que $e_n = 3\cdot 4^n$, entonces $e_{n+1} = e_n\cdot 4 = 3\cdot 4^n\cdot 4 = 3\cdot 4^{n+1}$ ✓

Entonces queda demostrado que $e_n = 3\cdot 4^n$, para todo paso n.

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

No es necesario que hagan la inducción, pero si la hacen dar 0.4 por si se equivocan en algo.

b) Calcule el área de cada triángulo añadido en el paso n.

Como los triángulos añadidos en cada paso son equiláteros, entonces necesitamos el lado de cada triángulo, denotado l_n.

Notemos que para el paso $n=0$ se agrega el triángulo original de lado $l_0 = a$, y luego como cada lado es $1/3$ del lado anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} l_0 &= a \\ l_1 &= a/3 \\ l_2 &= a/9 \\ &\vdots \\ l_{n+1} &= l_n/3 \end{aligned}$$

Probaremos por inducción que $l_n = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$n=0$: $l_0 = a = a \cdot \frac{1}{1} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ ✓

$n \Rightarrow n+1$: Supongamos que $l_n = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, entonces

$$l_{n+1} = l_n/3 = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \checkmark$$

Entonces el área de cada triángulo añadido será

$$a_n = \frac{l_n^2 \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a}{3^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9^n}$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

No es necesario que hagan la inducción, pero si la hacen dar 0.4 por si se equivocan en algo.

c) Calcule el área añadida en cada iteración, es decir, el valor de $A_n - A_{n-1}$.

En cada iteración el área añadida será el área de cada triángulo añadido multiplicado por la cantidad de triángulos. Como se agrega un triángulo por cada arista de la iteración anterior, el área añadida está dada por

$$d_n = e_{n-1} \cdot a_n = (3 \cdot 4^{n-1}) \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9^n}\right) = \frac{3}{4} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

para $n \geq 1$.

$\longrightarrow$ 1.2pts.

d) Usando una sumatoria y el área A_0, exprese el área A_n en función de n y a.

Como el área en el paso n es igual al área del paso 0 sumado a las diferencias de cada paso $k \leq n$, entonces

$$A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{32}{20} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

Dar 0.2 por mostrar $A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k$, 0.4 por usar la suma geométrica y 0.6 por simplificar (no es necesario que quede simplificada totalmente, pero sí que trabajen la expresión y no la dejen tal cual.

e) Calcule $\lim_{n\to\infty} A_n$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Como $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, entonces $\left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0$ y con esto,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \cdot 0\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$$

$\longrightarrow$ 1.2 pts.

Dar 0.6 por el argumento $\left|\frac{4}{9}\right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0$, y 0.6 por el resto.