

Pauta Tarea 4

P1. Calcule los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 + 4} \right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + n + 1}]$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1) \left(\frac{3n + 2}{5n - 2} \right)^n$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 + 4} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2n+1)}{n^2+4} \right)^n$

Resolvemos usando teorema del sandwich.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2n+1)}{n^2+4} \right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \right)^n, \text{ para } n \geq 2.$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \right)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right)^2$$

Algebra de
Límites

$$= \left[\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right]^2$$

$$= \left(\frac{1}{e} \right)^2 = \frac{1}{e^2}$$

→ 0.6pts.

y también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2n+1)}{n^2+4} \right)^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2n+1)}{n^2} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)^2}{n^2} \right)^n$$

Cambio de variable: $u = n-1$.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^{n+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right)^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \\
 &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{e} \right)^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{e^2}
 \end{aligned}$$

Como ambos límites son iguales, por el teorema del sandwich se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 + 4} \right)^n = \frac{1}{e^2}$$

→ 0.6 pts.

b) Para este límite estudiaremos lo que está dentro de la raíz n -ésima, veremos si converge y ocuparemos el límite de la raíz n -ésima de una secuencia convergente.

$$a_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (\cancel{n+1} - \cancel{n})$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Ahora veremos la monotonía de lo anterior.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \sqrt{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n}}{\underbrace{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}_{>0} \underbrace{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}_{>0}} \} > 0$$
$$> 0$$

→ 0.4 pts.

Por lo tanto a_n es creciente. Además es acotada superiormente, ya que $a_n < 1$ para todo n .

Como a_n es creciente y acotada superiormente, sabemos por el teorema de las sucesiones monótonas que a_n converge a un número $a \in \mathbb{R}$. Además sabemos que $a > 0$, ya que $a_n > 0$ para todo n .

→ 0.4 pts.

Con lo anterior ya podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = 1$, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

→ 0.4 pts.

Otra opción sería calcular el límite de a_n explícitamente (que es $1/2$). En ese caso dar 0.8 pts. por encontrar el límite y los mismos 0.4 pts por concluir con el límite de la raíz n -ésima.

c) Nuevamente usaremos el teorema del sandwich para esta sucesión.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2+n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2+n+1})(\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+n+1})}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} + 2n + 2 - \cancel{n^2} - n - 1}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+n+1}} \end{aligned}$$

→ 0.4 pts.

Por un lado,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+n+1}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+n+1}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1/2}} \rightarrow 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

→ 0.4 pts.

Por el otro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+n+1}} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2+2n+2}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+2n+1}} \\&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+4n+4}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{\text{red } 1} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalmente por el teorema del sandwich se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2+n+1}) = \frac{1}{2}$$

→ 0.4 pts.

$$\begin{aligned}\text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{\text{red } 0} \\&= 1\end{aligned}$$

→ 0.8 pts.

→ 0.4 pts.

$$\begin{aligned}\text{e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+1) \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right)^n \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n^2} \frac{3n+2}{5n-2} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right)^n\end{aligned}$$

→ 0.4 pts.

Notemos que para $a_n = \sqrt[n]{n^2} \frac{3n+2}{5n-2}$ y $b_n = \frac{3n+2}{5n-2}$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n})^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right) = 1^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right) = \frac{3}{5}$$

—————→ 0.4 pts.

y como $|\frac{3}{5}| < 1$, entonces se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^n = 0$.

$$\text{Se concluye que } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+1) \left(\frac{3n+2}{5n-2} \right)^n = 0$$

—————→ 0.4 pts.

Todos estos límites tienen varias formas de resolverse, lo importante es que ocupen correctamente las propiedades y que no se salten pasos.

P2. Considere las sucesiones:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

El propósito de este problema es demostrar que a_n converge a un número L que cumple $\frac{37}{60} < L < \frac{57}{60}$. Para ello, siga los siguientes pasos:

- Demuestre que a_n es decreciente y que está acotado inferiormente.
- Demuestre que a_n converge a un número L comprendido entre $\frac{1}{2}$ y 1.
- Pruebe que la sucesión b_n es creciente, converge y que su límite es el mismo que la sucesión $\{a_n\}$.
- Demuestre que $\frac{37}{60} < L < \frac{57}{60}$. **Hint:** Evalúe las sucesiones a_n y b_n para un valor de n conveniente.

a) Primero notemos que podemos escribir a_n como

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$$

Veamos que es decreciente.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k} \right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{n - 2n - 1}{n(2n+1)} \\ &= \frac{n(2n+1) + 2(n+1)(-n-1)}{2(n+1) \cdot n(2n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + n - 2n^2 - 4n - 2}{2n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Es decir a_n es decreciente.

—————→ 10 pt.

Además a_n es acotada inferiormente, ya que como $\frac{1}{n+k} \geq 0$ para todo $n \geq 1$ y para todo $0 \leq k \leq n$, entonces $a_n \geq 0$ para todo n . Es decir a_n es acotada inferiormente por 0.

—————→ 0.5pts.

b) En primer lugar, como a_n es decreciente y acotada inferiormente, por el teorema de las sucesiones monótonas sabemos que a_n converge, es decir existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

—————→ 0.5pts.

Notemos que para todo n , tenemos

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n+1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

con lo cual se tiene que $\frac{1}{2} \leq L$.

—————→ 0.5pts.

Además, tomando $n=3$ notemos que

$$a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+15+12+10}{60} = \frac{57}{60} \leq 1$$

Como a_n es decreciente y junto a lo anterior, se tiene que $L < 1$.

Se concluye que L está entre $\frac{1}{2}$ y 1 .

—————→ 0.5pts.

c) Primero reescribimos b_n como

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Veamos que es creciente:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2n+1 + 2(n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2\underbrace{(n+1)}_{>0} \underbrace{(2n+1)}_{>0}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos que $b_{n+1} > b_n$, es decir b_n es creciente.

→ 0.5pts.

Además, notar que $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$

Esto es, b_n es acotado superiormente. Por el teorema de las sucesiones monótonas, esto implica que b_n es convergente.

→ 0.5pts.

Para ver que convergen al mismo límite, se puede resolver de distintas formas.

I) Escribiendo a_n en términos de b_n .

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + b_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n
\end{aligned}$$

→ 0.5pts.

II) Calculando $a_n - b_n$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

→ 0.5pts.

d) En la parte b) notamos que $L < \frac{57}{60}$ al evaluar a_n en $n=3$. → 0.6pts.

Haciendo lo mismo para b_n con $n=3$, tenemos que

$$b_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60}.$$

y como b_n es (estrictamente) creciente, esto nos dice que $\frac{37}{60} < L$. → 0.6pts.

Por lo tanto se concluye que $\frac{37}{60} < L < \frac{57}{60}$. → 0.3pts.

P3. Utilice el teorema del Sandwich para demostrar los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 + e^n + e^{2n} + \dots + e^{kn}) = k$, con k un entero positivo fijo.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

En primer lugar, tenemos la desigualdad del logaritmo:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad \forall x > 0$$

Luego, tenemos que $\ln n \leq n - 1 \leq n$, por lo tanto

$$\sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{\ln n} \leq \sqrt[n]{n}$$

—————→ 1.0 pt.

Además $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 > 0$, por lo tanto $\sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. También $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, luego por el teorema del sandwich tenemos que

—————→ 1.0 pt.

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$

—————→ 1.0 pt.

Entregar 0.5 pts por cada desigualdad, 0.5 pts. por cada límite, y 1.0 pt. por el correcto uso del teorema.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 + e^n + e^{2n} + \dots + e^{kn}) = k$, para $k \in \mathbb{N}$ fijo.

Primero reescribimos el límite como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\sum_{i=0}^k e^{in}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\sum_{i=0}^k (e^n)^i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1 - e^{n(k+1)}}{1 - e^n}\right)$$

Ahora usando las desigualdades fundamentales del logaritmo y la exponencial, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1 - e^{n(k+1)}}{1 - e^n}\right) &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{n(k+1)}}{1 - e^n} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{e^n - e^{n(k+1)}}{1 - e^n}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot e^n \left(\frac{1 - e^{kn}}{1 - e^n} \right)$$

$$\leq \frac{e^n}{n} \left(\frac{1 - (kn+1)}{1 - e^n} \right)$$

$$= \frac{e^n}{\cancel{n}} \left(\frac{\cancel{kn}}{e^n - 1} \right)$$

$$= k \cdot \frac{e^n}{e^n - 1}$$

$$= k \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{e^n}} \right)$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} k \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{e^n}} \right) = k \cdot 1 = k$

—————→ 4.0pt.

Además,

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{1 - e^{n(k+1)}}{1 - e^n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^{n(k+1)} - 1}{e^n} \right)$$

$$\geq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^{n(k+1)} - e^{nk}}{e^n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \ln \left(e^{nk} \frac{(e^n - 1)}{e^n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left[\ln(e^{nk}) + \ln \left(\frac{e^n - 1}{e^n} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[nk + \ln \left(\frac{e^n - 1}{e^n} \right) \right]$$

$$= k + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^n - 1}{e^n} \right)$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} k + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^n - 1}{e^n} \right) = k + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^n - 1}{e^n} \right) \right) = k + 0 \cdot 0$

—————→ 4.0pt.

Finalmente por el teorema del sandwich, como los límites son iguales concluimos lo pedido, es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 + e^n + \dots + e^{kn}) = k, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

—————→ 4.0pt.