

Pauta Tarea 3

P1. Considere un triángulo ABC de ángulos α , β y γ . Demuestre que:

$$\frac{\sin(\gamma)}{\cos(\alpha) + \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\cos(\alpha) + \cos(\beta)} \implies \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Veremos 2 formas alternativas de resolver este problema:

I. Teoremas del seno y coseno

Sean a, b, c los lados opuestos a los ángulos α, β, γ , respectivamente.

Por el teorema del seno, se tiene que

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} \implies \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma, \quad \sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma$$

$$\implies \sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sin \gamma}{c} (a+b)$$

—————→ 1.0 pt.

Además, por el teorema del coseno se tiene que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \implies \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\implies \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2c} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a} \right)$$

—————→ 1.0 pt.

Con lo anterior en cuenta, entonces

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \implies \sin \gamma = \frac{\frac{\sin \gamma}{c} (a+b)}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

$$\implies \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{c} (a+b)$$

$$\implies \frac{1}{2c} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{b} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a} \right) = \frac{1}{c} (a+b)$$

$$\implies a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) = 2ab(a+b)$$

$$\Rightarrow c^2(a+b) - (a^3+b^3) = ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(c^2 - a^2 + ab - b^2) = ab(a+b)$$

$$\Rightarrow c^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

—————→ 2.0 pts.

Si a partir de esto argumentan que el triángulo es rectángulo y concluyen, dar 1.0 pt.

Pero por el teorema del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Por lo tanto,

$$2ab \cos \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = 0$$

—————→ 1.0 pt.

Como $\gamma \in (0, \pi)$, entonces lo anterior nos dice que $\gamma = \frac{\pi}{2}$

—————→ 1.0 pt.

No es estrictamente necesario que digan que $\gamma \in (0, \pi)$.

II. Identidades trigonométricas

Usando las identidades

$$1) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$2) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

y el hecho de que al estar en un triángulo, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ y por lo tanto $|\alpha - \beta|/2 \in [0, \pi/2)$, luego $\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \neq 0$.

—————→ 0.5 pts.

Por mencionar que $\cos \frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$ para poder simplificarlo después.

Además, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, por lo tanto $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, y con esto

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\cancel{2} \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cancel{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{\cancel{2} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cancel{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{\cancel{\sin(\frac{\pi}{2})} \cos(\frac{\gamma}{2}) - \cancel{\sin(\frac{\gamma}{2})} \cos(\frac{\pi}{2})}{\cancel{\cos(\frac{\pi}{2})} \cos(\frac{\gamma}{2}) + \cancel{\sin(\frac{\pi}{2})} \sin(\frac{\gamma}{2})}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

—————→ 2.5 pts.

Ahora usando el seno del ángulo doble para el ángulo $\theta = \frac{\gamma}{2}$, entonces

$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Como $\gamma \in (0, \pi)$, entonces $\theta \in (0, \pi/2)$ y con esto, $\sin \theta \neq 0$ y $\cos \theta \neq 0$. Luego,

$$\Rightarrow \cos \theta (2 \sin^2 \theta - 1) = 0$$

—————→ 1.0 pt.

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

—————→ 2.0 pts.

P2. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$, $x \leq y$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

- a) S tiene supremo, T tiene ínfimo y $\sup(S) \leq \inf(T)$.
- b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $\forall \epsilon > 0$, $a < b + \epsilon$, entonces $a \leq b$.
- c) Si $m, n \in \mathbb{R}$ son tales que $\forall \delta > 1$, $m < \delta n$, entonces $m \leq n$.

a) 1) Veamos que S tiene supremo:

Como $T \neq \emptyset$, entonces existe $t \in T$. Luego como $\forall x \in S$, $x \leq t$, entonces S es acotado superiormente.

Por el axioma del supremo, como S es no vacío y acotado superiormente, entonces S tiene supremo.

—————→ 0.5 pts.

2) Veamos que T tiene ínfimo.

Análogo a lo anterior, como $S \neq \emptyset$ entonces existe $s \in S$. Luego como $s \leq y \quad \forall y \in T$, entonces T es acotado inferiormente.

Por el axioma del supremo, como T es no vacío y acotado inferiormente, entonces T tiene ínfimo.

—————→ 0.5 pts.

3) Probaremos que $\sup S \leq \inf T$.

Dado que $\forall x \in S$, $\forall y \in T$, $x \leq y$, entonces todo $y \in T$ es cota superior de S . Como el supremo es la menor de tales cotas (para toda cota sup. a , se tiene que $\sup S \leq a$), se tiene que $\sup S \leq y$, para cualquier $y \in T$.

Lo anterior nos dice que $\sup S$ es una cota inferior para T . Como el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores (ie para toda cota inf. i , $i \leq \inf T$), entonces se concluye que $\sup S \leq \inf T$.

—————→ 1.0 pt.

Esta última parte también se puede demostrar por contradicción, tomando r tal que $\inf T < r < \sup S$ y llegando a que existen $x_0 \in S$, $y_0 \in T$ tales que $x_0 > y_0$ (contradicción).

b) Se puede resolver de 2 formas distintas:

I. Usando la parte (a)

Definamos $S = \{a\}$, $T = \{b + \varepsilon : \varepsilon > 0\} = (b, \infty)$

—————→ 1.0 pt.

Notemos que:

- $S \neq \emptyset$, ya que $a \in S$
- $T \neq \emptyset$, ya que $b+1 \in T$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$. Esto implica que $\forall x \in S, \forall y \in T, x \leq y$.

Por lo visto en la parte anterior, se tiene que

$$a = \sup S \leq \inf T = b$$

—————→ 1.0 pt.

II. Forma directa

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto definido por $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, x < b + \varepsilon\}$.

Notemos que $A \neq \emptyset$, ya que $a, b \in A$. Además A es acotado superiormente, ya que $x \in A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, x < b + \varepsilon$, luego fijando ε (por ejemplo $\varepsilon = 1$) tenemos una cota superior.

Como A es no vacío y acotado superiormente, entonces tiene supremo. Veremos que $\sup A \leq b$.

—————→ 0.5 pts.

Por definir el conjunto y mostrar que tiene supremo.

Por contradicción, supongamos que $\sup A > b$, o sea $\sup A - b > 0$. Luego por la propiedad arquimediante, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup A - b > \frac{1}{n}$$

—————→ 0.5 pts.

Entonces, existe $\bar{\varepsilon} = 1/n > 0$ (fijo) tal que $\sup A > b + \bar{\varepsilon}$, pero como $b + \bar{\varepsilon}$ es una cota superior esto es una contradicción (ya que el supremo es la menor de las cotas).
—————→ ✖

Por lo tanto se tiene que $\sup A \leq b$.

Como $a \in A$, entonces $a \leq \sup A$, y finalmente se concluye que $a \leq b$.
—————→ 1.0 pt.

Hay varias formas de demostrar lo anterior, incluso algunas que no usan supremo. Si la demostración es consistente, asignar todo el puntaje.

c) En primer lugar veremos que $n \geq 0$. Esto porque de lo contrario no existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m < \delta n \forall \delta > 0$, ya que el conjunto $\{\delta n : \delta > 1\} = (-\infty, n)$ no es acotado inferiormente.

Esta parte es general y muy importante, independiente del método que utilicen.

Notar que si $n=0$, entonces $\delta n=0$, y si se cumple la propiedad que $\delta > 1 \Rightarrow m < \delta n=0$, entonces es directo que $m \leq n=0$. → 0.5 pts.

Para $n=0$ también se podría definir $T=\{0\}$ y usar la parte (a), lo que es equivalente.

Con esto en cuenta, nuevamente podemos resolver de 2* formas distintas para $n > 0$:

I. Usando la parte (a)

Definamos $S = \{m\}$, $T = \{\delta n : \delta > 1\} = (n, \infty)$

→ 0.5 pts.

Notemos que:

- $S \neq \emptyset$, ya que $m \in S$
- $T \neq \emptyset$, ya que $2n \in T$.
- $\forall \delta > 1$, $m < \delta n$. Esto implica que $\forall x \in S, \forall y \in T, x < y$.

Por lo visto en la parte (a), se tiene que

$$m = \sup S \leq \inf T = n$$

→ 1.0 pt.

II. Forma directa

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto definido por $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 1, x < \delta n\}$.

Notemos que $A \neq \emptyset$, ya que $m, n \in A$. Además A es acotado superiormente, ya que $x \in A \Rightarrow \forall \delta > 1, x < \delta n$, luego fijando δ (por ejemplo $\delta = 2$) tenemos una cota superior.

Como A es no vacío y acotado superiormente, entonces tiene supremo. Veremos que $\sup A \leq n$.

→ 0.5 pts.

Por definir el conjunto y mostrar que tiene supremo.

Supongamos que $n \neq 0$. Por contradicción, supongamos que $\sup A > n$, luego

$$\sup A > n \implies \frac{\sup A}{n} > 1$$

$$\implies \frac{\sup A}{n} - 1 > 0$$

$$\implies \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{\sup A}{n} - 1 > \frac{1}{k}$$

$$\implies \exists \bar{\delta} = 1 + \frac{1}{k} \text{ tal que } \frac{\sup A}{n} > \bar{\delta}$$

$$\implies \exists \bar{\delta} \text{ tal que } \sup A > \bar{\delta} n$$

Pero como dijimos antes esto es una contradicción con el supremo, ya que $\bar{\delta} n$ es cota superior.



Por lo tanto se tiene que $\sup A \leq n$.

Como $m \in A$, entonces $m \leq \sup A$, y finalmente se concluye que $m \leq n$.

—————→ 1.0 pt.

* Otro método es usar que $\delta > 1 \implies \delta = 1 + \bar{\epsilon}$, $\bar{\epsilon} > 0$, luego $\delta n = n + n\bar{\epsilon}$, y tomando $\epsilon = n\bar{\epsilon} > 0$, se puede usar la parte (b).

P3. Sea $c > 0$ y la sucesión definida por recurrencia

$$a_1 = \sqrt{c}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, \quad \text{con } n \geq 1$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) $\{a_n\}$ es creciente.
- b) Si $L = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$, entonces $L + c = L^2$
- c) $\{a_n\}$ es acotada superiormente por L .
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

a) Probaremos el crecimiento por inducción sobre n .

• CASO BASE: $n=1$

$$c > 0 \Rightarrow \sqrt{c} > 0 \Rightarrow c + \sqrt{c} > c \Rightarrow \sqrt{c + \sqrt{c}} > \sqrt{c}$$

como $a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c + \sqrt{c}} = a_2$, se cumple el caso base.

• Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n < a_{n+1}$. P.D.Q. $a_{n+1} < a_{n+2}$.

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow c + a_n < c + a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Entonces por inducción se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$. Esto es, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente (estricta).

—————→ 1.5 pts.

Dar 0.5 por el caso base y 1 por el paso inductivo.

b) Dada $L = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$, entonces

$$L^2 = \frac{1 + 2\sqrt{1+4c} + 1 + 4c}{4} = \frac{2(1 + \sqrt{1+4c})}{4} + c = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2} + c$$

$$= L + c$$

—————→ 1.5 pts.

c) Nuevamente hacemos inducción sobre n .

Notemos que $L > 0$, y además de la parte anterior se tiene que $L^2 = c + L \Rightarrow L = \sqrt{c + L}$.

• Caso base: P.D.Q. $a_1 \leq L$.

$$L > 0 \Rightarrow L + c > c \Rightarrow \sqrt{L + c} > \sqrt{c} \Rightarrow L > a_1$$

• Supongamos que para algún n , $a_n \leq L$. P.D.Q. $a_{n+1} \leq L$

$$a_n \leq L \Rightarrow c + a_n \leq c + L \Rightarrow \sqrt{c + a_n} \leq \sqrt{c + L} \Rightarrow a_{n+1} \leq L$$

Con lo cual queda demostrado que $a_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\{a_n\}$ es acotada superiormente por L .

—————→ 1.5 pts.

Dar 0.5 por el caso base y 1 por el paso inductivo.

d) En primer lugar, como $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces por el teorema de las sucesiones monótonas $\{a_n\}$ converge.

—————→ 0.5 pts.

Como $a_n > 0 \forall n$ y es creciente, entonces $a = \lim a_n > 0$.

Por álgebra de límites, usando que si $\{s_n\} > 0$ converge a $s > 0$, entonces la sucesión $\{\sqrt{s_n}\}$ converge a $\sqrt{s} > 0$. Además, se tiene que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ y $\forall z \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + z) = s + z$.

—————→ 0.5 pts.

Con todo lo anterior, tenemos que

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + c}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a + c}$$

$$\Rightarrow a^2 = a + c$$

$$\Rightarrow a^2 - a - c = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

—————→ 0.5 pts.

Ahora bien, como sabemos que $a > 0$ entonces se descarta la opción con el signo menos (ya que $\sqrt{1+4c} > 1$ y por lo tanto "a" sería negativo).

Por lo tanto concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2} = L$$

—————→ 0.5