Pauta Control 1 MA2601 2025/2

Profesores. Julien Boulanger y Salomé Martínez

1. *a)* (2 ptos) Determinar todas las soluciones en función de los parametros λ, θ_a.

   - **(1 pto)** La ecuación diferencial es lineal de primer orden. Podemos reescribirla como $\theta'(t)+\lambda\theta(t) = \lambda\theta_a$. Usamos el factor integrante $e^{\lambda t}$. Esto permite para buscar una solución de la forma $\theta(t)e^{\lambda t} = k(t)$ (o de manera equivalente $\theta(t) = k(t)e^{-\lambda t}$):
   - **(1 pto)** Reescribiendo la ecuación con la función $k(t)$, tenemos

   $$k'(t) = \lambda\theta_a e^{\lambda t} \quad \text{y entonces} \quad k(t) = \theta_a e^{\lambda t} + C.$$

   donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante. Multiplicando por $e^{-\lambda t}$, se obtiene:

   $$\boxed{\theta(t) = \theta_a + Ce^{-\lambda t}}$$

   b) (1 pto) Demuestre que todas las soluciones de la ecuación tienden a θ_a cuando $t \to \infty$.

   Sabemos que $\lambda > 0$, entonces $e^{-\lambda t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y:

   $$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \theta_a + C\underbrace{e^{-\lambda t}}_{\to 0} = \theta_a$$

   c) (2 ptos) Un vaso de agua a $10°C$, se saca del refrigerador y se deja sobre una mesa en una habitación a temperatura ambiente de $30°C$. Despues de 10 minutos el agua en el vaso está a $17°C$. ¿Cuanto tiempo despues de sacarla del refrigerador el agua alcanzará $25°C$?

   - Los datos del enunciado se escriben de la siguiente forma
     - Temperatura inicial: $\theta(0) = 10$°C
     - Temperatura ambiente: $\theta_a = 30$°C
     - Después de 10 minutos: $\theta(10) = 17$°C
     - Queremos: ¿cuándo es $\theta(t) = 25$°C?
   - **(1 pto)** Usamos la solución general $\theta(t) = \theta_a + Ce^{-\lambda t}$ con $\theta(0) = 10$, obtenemos $C = -20$ y entonces $\theta(t) = 30 - 20e^{-\lambda t}$
   - **(1 pto)** Ahora usamos $\theta(10) = 17$ para obtener :

   $$\lambda = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{13}{20}\right) \approx \frac{0{,}43}{10} = 0{,}043$$

   - **(1 pto)** Ahora buscamos el tiempo t tal que $\theta(t) = 25$, es decir: $30 - 20e^{-\lambda t} = 25$. Se obtiene

   $$-\lambda t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \simeq -1{,}38$$

   y entonces:

   $$t \approx \frac{1{,}38}{\lambda} = \frac{1{,}38}{0{,}043} \simeq 32,0.$$

   Entonces el agua alcanzará los 25°C aproximadamente después de 32 minutos.

   Nota: Si los estudiantes dejan el resultado expresado sin hacer cálculos solo asignar **0.2 ptos**.

2. Considere la ecuación diferencial

$$y' = a(x)y^2, \tag{1}$$

con $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

a) (2 ptos) Demuestre usando el Lema de Gronwall que si $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es solución de (1), con $x_0 \in [\alpha, \beta]$ y $y(x_0) = 0$, entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

- **(0.5pto)** Como $y(x_0) = 0$, para todo $x \in [\alpha, \beta]$, tenemos

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} a(s)y(s)^2 ds = \int_{x_0}^{x} a(s)y(s)^2 ds$$

Definimos $u(x) = |y(x)|$, por propiedades de la integral tenemos

$$u(x) = |y(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |a(s)||y(s)^2 ds = \int_{x_0}^{x} |a(s)|u(s)^2 ds$$

Ahora, como

- **(0.5 pto)** para todo $s \in [\alpha, \beta]$, $u(s)^2 \leq \text{máx}(|\alpha|, |\beta|)u(s)$ y;
- **(0.5 pto)** a es continua en el intervalo cerrado y acotado $[\alpha, \beta]$, entonces es acotada en este intervalo, es decir existe $M > 0$ tal que para todo $s \in [\alpha, \beta]$, $|a(s)| \leq M$. Entonces

$$u(x) = \left| \int_{x_0}^{x} a(s)y(s)^2\, ds \right| \leq \int_{x_0}^{x} |a(s)|u(s)^2\, ds \leq \int_{x_0}^{x} M \cdot \text{máx}(|\alpha|, |\beta|)u(s) ds$$

- **(0.5 pto)** Ahora aplicamos el Lema de Gronwall con $C = 0$ y $K = M \cdot \text{máx}(|\alpha|, |\beta|)$:

$$u(x) \leq 0 \cdot e^{M \cdot \text{máx}(|\alpha|, |\beta|) \cdot (x - x_0)} = 0$$

Entonces $u(x) = 0$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$ y lo mismo vale para $y(x)$.

b) (1 pto) Deduzca que si para una solución de (1) hay un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(x_0) = 0$, entonces necesariamente $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Aplicando el resultado anterior a cualquier intervalo acotado que contenga a x_0, se concluye que $y \equiv 0$ en cualquier intervalo cerrado y acotado, y entonces $y \equiv 0$ en todo el intervalo donde y esté definida.

c) (1,5 ptos) Suponga que $a(x) = -3x$. Bosqueje el diagrama de pendientes asociado a (1). Si sabe que las soluciones con $y(0) > 0$ están definidas para todo $\mathbb{R}$ conjeture a partir del diagrama $\lim_{x\to\infty} y(x)$, y $\lim_{x\to-\infty} y(x)$.

Suponga que $a(x) = -3x$. Tenemos la ecuación $y' = -3xy^2$.

- **(0,5 pto)** Observamos que:
  - **(0,2 pt)** Si $x > 0$ y $y \neq 0$, entonces $y' < 0$ (la solución decrece).
  - **(0,2 pt)** Si $x < 0$ y $y \neq 0$, entonces $y' > 0$ (la solución crece).
  - **(0,1 pt)** Si $y(x) = 0$, entonces $y \equiv 0$ (solución constante).
- **(0.5 pto)** Nos da el diagrama representado en la Figura 1.
- **(0.5 pto)** Conjetura: si $y(0) > 0$, como 0 es un punto de equilibrio de la ecuacion con variables separables $y' = -3xy^2$, entonces por unicidad (pregunta b.) para todo $x \in \mathbb{R}$, $y(x)$ tiene que ser positivo. Con nuestro diagrama de pendientes, se obtiene que la solución crece cuando $x < 0$ y decrece cuando $x > 0$. Como el cambio de y se hace más lento cuando y es pequeño (porque el término y^2 disminuye), esperamos que:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0}$$

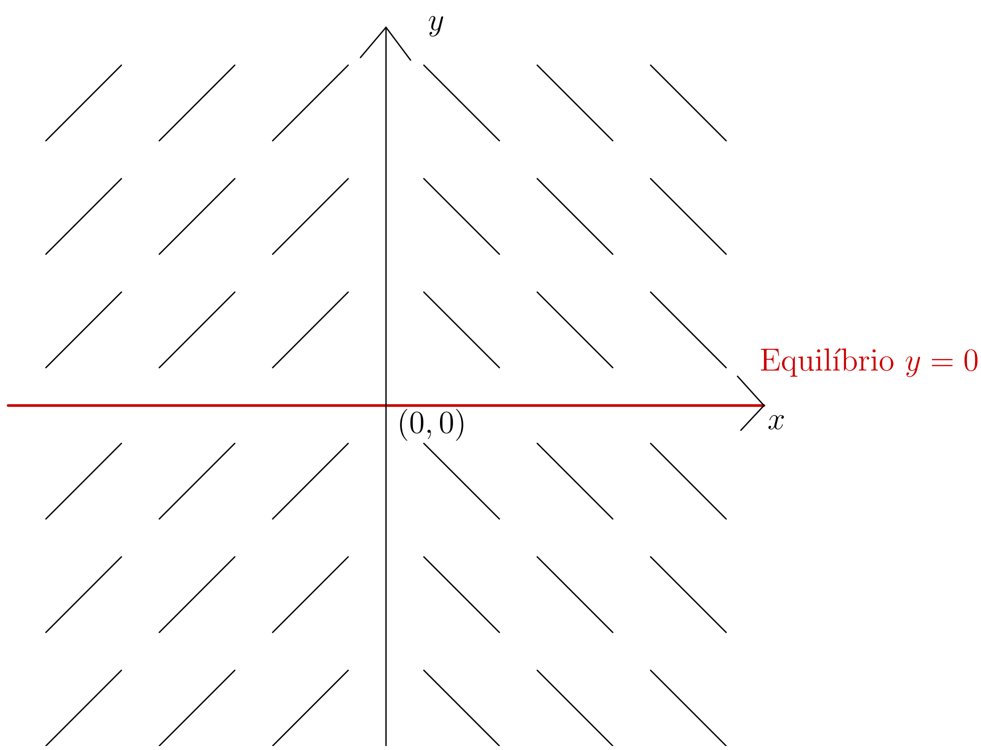

Figura 1: Diagrama de pendiente asociado con la ecuación $y' = -3xy^2$.

d) (1,5 ptos) Resuelva la ecuación (1) para $a(x) = -3x$, con condicion inicial $y(0) = y_0$, con $y_0 > 0$ y verifique que la solucion está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

- **(0,2 pto)** Se trata de una ecuación con variables separables. Cuando $y \neq 0$, tenemos:

$$\frac{y'}{y^2} = -3x$$

- **(0.5 ptos)** Integramos ambos lados:

$$\int y^{-2} dy = \int -3x\, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{3}{2}x^2 + C$$

Entonces,

$$y(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}x^2 - C}$$

- **(0.3 ptos)** Con la condición inicial $y(0) = y_0$, se obtiene $C = -\frac{1}{y_0}$, entonces,

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{y_0}}}$$

- **(0.5 ptos)** El denominador es siempre positivo (suma de dos positivos), así que la solución está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Determine la solución general de las siguientes ecuaciónes diferenciales:

(a) (2 ptos) $y' + 3xy = xy^4$.

- **(0.5 ptos)** Con el cambio de variable $z = y^{-3}$, la ecuación $y' + 3xy = xy^4$ se reescribe
$$-\frac{1}{3}z' + 3xz = x$$
multiplicando por -3, tenemos $z' - 9xz = -3x$

- **(0.3 ptos)** Es una ecuación lineal en z. Usamos el factor integrante:
$$\mu(x) = \exp\left(\int -9x dx\right) = e^{-\frac{9}{2}x^2}$$
Entonces tratamos de encontrar una solucion de la forma $z(x) = k(x)e^{\frac{9}{2}x^2}$, p bien de escribir la ecuación en términos de la derivada de $ze^{-\frac{9}{2}x^2}$

- **(0.2 pto)** Con la función k la ecuación se reescribe
$$k'(x) = -3xe^{-\frac{9}{2}x^2}$$
o equivalentemente
$$(e^{-\frac{9}{2}x^2}z' = -3xe^{-\frac{9}{2}x^2}$$

- **(0.5 pto)** Integramos:
$$e^{-\frac{9}{2}x^2}z(x) = k(x) = \int -3xe^{-\frac{9}{2}x^2}dx + C$$
Con la sustitución $u = -\frac{9}{2}x^2$ se recon202nce una integral de la forma $\int u'e^u$, más precisamente:
$$\begin{aligned}\int -3xe^{-\frac{9}{2}x^2}dx &= \int -\frac{1}{3}u'(x)e^u(x)du(x)\\ &= \int -\frac{1}{3}e^u du = -\frac{1}{3}e^u + C\\ &= -\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{2}x^2} + C.\end{aligned}$$
Donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante. Por lo tanto:
$$z(x) = k(x)e^{\frac{9}{2}x^2} = -\frac{1}{3} + Ce^{\frac{9}{2}x^2}$$

- **(0.5pto)** Volvemos a la variable y:
$$\boxed{y(x) = \left(-\frac{1}{3} + Ce^{\frac{9}{2}x^2}\right)^{-1/3}}$$
Que está definido siempre y cuando $-\frac{1}{3} + Ce^{\frac{9}{2}x^2} \neq 0$.

(b) (2 ptos) $x^2y' = y^2 + xy + x^2$, con $y(1) = 1$.

- **(0.2 pto)** Mediante el cambio de variable $y = xz$, tenemos $y' = z + xz'$ y podemos reescribir la ecuación:
$$xz' = z^2 + 1$$
que es a variables separables.

- **(0.3 pto)** Entonces, para $x \neq 0$ se escribe
$$\frac{dz}{z^2+1} = \frac{dx}{x}$$
Integramos ambos lados:
$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan z = \ln|x| + C$$

- **(0.5 pto)** Despejamos z, lo que se puede hacer con la función *tangente* siempre y cuando $\ln|x| + C \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:
$$z = \tan(\ln|x| + C) \Rightarrow y = xz = x\tan(\ln|x| + C)$$

- **(0.5pto)** Con la condición inicial $y(1) = 1$ se obtiene $1 = 1 \cdot \tan(\ln 1 + C) = \tan(C)$ entonces $C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

- **(0.5pto)** En conclusion, la solución es de la forma
$$\boxed{y(x) = x \cdot \tan\left(\ln|x| + \frac{\pi}{4}\right)}$$

- **(0.5pto bonus)** Está definida siempre y cuando $x \neq 0$ (para que podamos considerar el logaritmo) y $\ln|x| + \frac{\pi}{4} \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (para que podamos aplicar la tangente), entonces el intervalo más grande que contiene 1 tal que la funcion y está bien definida es el intervalo $\left[e^{-\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{4}}\right]$.

(c) Considere la ecuación $N'(t) = a(t)N(t)$ que modela el cambio de una población con tasa de crecimiento dependiendo de t. Suponga que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y de período 1, es decir $a(t+1) = a(t)$ para todo t.

(1) (1 pto) Sea $\bar{a} = \int_0^1 a(s)\,ds$. Demuestre directamente que $b(t) = \int_0^t a(s) - \bar{a}\,ds$ tiene período 1.

- **(0.5pto)** Consideramos:

$$b(t+1) = \int_0^{t+1} (a(s) - \bar{a})ds = \int_0^t (a(s) - \bar{a})ds + \int_t^{t+1} (a(s) - \bar{a})ds$$

Entonces $b(t+1) = b(t) + u(t)$ donde

$$g(t) = \int_t^{t+1} (a(s) - \bar{a})ds$$

- **(0.5pto)** Ahora, por el TFC la función $g(t)$ tiene derivada

$$g'(t) = (a(t+1) - \bar{a}) - (a(t) - \bar{a}) = a(t+1) - a(t) = 0$$

ya que a es periodica de periodo 1. Por lo tanto g es constante. Además, $g(0) = 0$, entonces $g(t) = 0$. Entonces

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad b(t+1) = b(t) + g(t) = b(t)}$$

(2) (1 ptos) Demuestre que si $\bar{a} > 0$ y $N(0) > 0$, entonces $N(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

- **(0.2 pto)** La ecuación es lineal de orden 1 y homogenea, entonces la forma de la solucion es:

$$N(t) = N(0) \cdot \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

- **(0.3 pto)** Descomponemos el exponente:

$$\int_0^t a(s)ds = \int_0^t \bar{a} + (a(s) - \bar{a})ds = \bar{a}t + b(t) \Rightarrow N(t) = N(0) \cdot e^{\bar{a}t} \cdot e^{b(t)}$$

- **(0.5pto)** Como $b(t)$ es continua y periódica, es acotada, es decir existe una constante $M > 0$ tal que $|b(t)| \leq M$. Entonces:

$$N(t) \geq N(0) \cdot e^{\bar{a}t - M} \to \infty \text{ cuando } t \to \infty$$