**Control 1 MA2601 2025/2**

**Profesores.** Julien Boulanger y Salomé Martínez

Tiempo: 3 hrs

1. La variación de la temperatura de un líquido dejado en un entorno a temperatura ambiente sigue la siguiente ley:

$$\theta'(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t))$$

En este ecuación $\theta(t)$ es la temperatura del líquido, $\theta_a$ es la temperatura ambiente (que se supone constante) y, $\lambda > 0$ es una constante que depende de las características del líquido y del entorno.

   *a)* (2 ptos) Determinar todas las soluciones en función de los parametros $\lambda$, $\theta_a$.

   *b)* (1 pto) Demuestre que todas las soluciones de la ecuación tienden a $\theta_a$ cuando $t \to \infty$.

   *c)* (3 ptos) Un vaso de agua a $10°C$, se saca del refrigerador y se deja sobre una mesa en una habitación a temperatura ambiente de $30°C$. Despues de 10 minutos el agua en el vaso está a $17°C$. ¿Cuanto tiempo despues de sacarla del refrigerador el agua alcanzará $25°C$?
   **Ind.** Use los datos para encontrar la constante $\lambda$. Se será útil usar las aproximaciones $\ln(\frac{13}{20}) \simeq -0,43$, $\ln(\frac{1}{4}) \simeq -1{,}38$, y $\frac{1{,}38}{0{,}43} \simeq 3{,}20$.

2. Considere la ecuación diferencial

$$y' = a(x)y^2, \tag{1}$$

con $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

   *a)* (2 ptos) Demuestre usando el Lema de Gronwall que si $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es solución de (1), con $x_0 \in [\alpha, \beta]$ y $y(x_0) = 0$, entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$. Indicación: El Lema de Gronwall establece que si $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es continua, $u \geq 0$ y para constantes $C \geq 0$ y $K \geq 0$ se tiene que $u(x) \leq C + K \int_{x_0}^{x} u(s)ds$, entonces $u(x) \leq Ce^{K(x-x_0)}$. Se será útil considerar $u(x) = |y(x)|$.

   *b)* (1 pto) Deduzca usando la parte anterior, que si para una solución $y$ de (1) hay un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(x_0) = 0$, entonces necesariamente $y(x) = 0$ para todo $x$ donde esté definida.

   *c)* (1,5 ptos) Suponga que $a(x) = -3x$. Bosqueje el diagrama de pendientes asociado a (1). Si sabe que las soluciones con $y(0) > 0$ están definidas en $\mathbb{R}$, conjeture a partir del diagrama $\lim_{x\to\infty} y(x)$, y $\lim_{x\to-\infty} y(x)$.

   *d)* (1,5 ptos) Resuelva la ecuación (1) para $a(x) = -3x$, con condicion inicial $y(0) = y_0$, con $y_0 > 0$ y verifique que la solucion está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. *a)* Determine la solución general de las siguientes ecuaciónes diferenciales:

   1) (2 ptos) $y' + 3xy = xy^4$. Indicación: Considere el cambio de variables $z = y^{1-4}$.
   2) (2 ptos) $x^2y' = y^2 + xy + x^2$, con $y(1) = 1$. Indicación: Le puede ser útil el cambio de variables $y = xz$.

   *b)* Considere la ecuación $N'(t) = a(t)N(t)$ que modela el cambio de una población con tasa de crecimiento dependiendo de $t$. Suponga que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y de período 1, es decir $a(t + 1) = a(t)$ para todo $t$.

   1) (1 pto) Sea $\bar{a} = \int_0^1 a(s)\,ds$. Demuestre directamente que $b(t) = \int_0^t (a(s) - \bar{a})\,ds$ tiene período 1. Ind.: Para probar que $\int_t^{t+1}(a(s) - \bar{a})\,ds = 0$, considere la función $g(t) = \int_t^{t+1}(a(s) - \bar{a})\,ds$. Muestre que $g$ tiene derivada 0 y evalúe $g(0)$.
   2) (1 ptos) Demuestre que si $\bar{a} > 0$ y $N(0) > 0$, entonces $N(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.