Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2025-1

Control 3 - Otoño 2025

P1. a) (3.0 pts.) Determine cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) (3.0 pts.) Determine todos los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ que hacen que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 4a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) **[1.0 pts. por dar el argumento correcto en cada caso; si no hay justificación no hay puntaje]**

Como A es triangular superior, sus valores propios son los que aparecen en la diagonal y las veces que están repetidos son sus multiplicidades algebraicas. En particular, 2 es valor propio de multiplicidad algebraica 3. La multiplicidad geométrica del valor propio 2 es 2 (ya que $W_2 = \langle\{(1,0,0,0)^T, (0,1,\text{-}1,0)^T\}\rangle$ tiene dimensión 2). Como la multiplicidad algebraica y geométrica de uno de sus valores propios no coinciden, la matriz A no es diagonalizable.

La matriz B tiene 4 valores propios distintos, es decir, tiene el mismo número de valores propios distintos que la dimensión del espacio $\mathbb{R}^4$. Por resultado visto, sigue que B es diagonalizable.

La matriz C es diagonalizable pues es simétrica.

b) El polinomio característico de D es $p(\lambda) = |D - \lambda I|$. Calculando el determinante se obtiene que $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4a^2)(1 - a - \lambda)$ [**0.8 pts.**]. Sigue que los valores propios de D son $2a$, $\text{-}2a$ y $1 - a$ [**0.2 pts. por cada valor propio**].

Si D tiene 3 valores propios distintos, por resultado conocido, la matriz es diagonalizable. Luego, si $a \notin \{\text{-}1, 0, 1/3\}$, se tiene que D es diagonalizable [**0.4 pts.**].

Si $a = \text{-}1$, los valores propios son -2 y 2 de multiplicidades algebráicas 1 y 2, respectivamente. Se verifica que $W_2 = \langle\{(1,\text{-}2,0)^T, (0,0,1)^T\}\rangle$ y tiene dimensión 2. Como las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, sigue que D es diagonalizable, si $a = \text{-}1$ [**0.4 pts.**].

Si $a = 0$, los valores propios son 0 y 1 de multiplicidades algebraicas 2 y 1, respectivamente. Se verifica que $W_0 = \langle\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T\}\rangle$ y tiene dimensión 2. Como las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, sigue que D es diagonalizable, si $a = 0$ [**0.4 pts.**].

Si $a = 1/3$, los valores propios son 2/3 y -2/3 de multiplicidades algebraicas 2 y 1, respectivamente. Se verifica que $W_{2/3} = \langle\{(1,2,0)^T, (0,0,1)^T\}\rangle$ y tiene dimensión 2. Como las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, sigue que D es diagonalizable, si $a = 1/3$ [**0.4 pts.**].

En resumen, D es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$.

Indicaciones para la corrección:

P2. Sea v vector propio de la matriz A asociado al valor propio λ, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Determine λ.

b) (1.5 pts.) Encuentre $\mathcal{B}$ que contenga a v y que además sea base ortonormal de $W_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ (el espacio de vectores propios asociados a λ).

c) (1.5 pts.) Encuentre una base ortonormal de $Ker(A + I)$. ¿Es -1 valor propio de A?

d) (1.5 pts.) Determine $D, P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ donde D es diagonal, P es invertible y $P^{-1} = P^T$, tales que $A = PDP^T$.

Solución:

a) Como $Av = v = 1 \cdot v$, por definición de valor y vector propio, sigue que v es vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ [**0.8 pts. por el cálculo de Av y 0.7 pts. por la conclusión**].

b) Observar que:

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notar que la última fila de $A - I$ es igual a la segunda y su penúltima fila igual a -1 veces la primera. Además, sus dos primeras filas forman un conjunto linealmente independiente. Se concluye que el núcleo de la matriz tiene dimensión dos [**0.5 pts. por determinar la dimensión de $Ker(A - I)$, explícita o implícitamente**].

Para hallar la base pedida basta encontrar un vector v' en $Ker(A-I)$ que sea de norma uno y ortogonal a v [**0.5 pts. por encontrar v' en $Ker(A - I)$ ortogonal a v de cualquiera de las dos formas que se indican a continuación**].

Primera forma: Por inspección notando que $v' = (1, -1, 1, 1)^T$ cumple lo pedido.

Segunda forma: Resolviendo explícitamente el sistema $(A-I)x = 0$. En este caso, $x_1 = x_3$ y $x_2 = -x_4$. Además, hay que imponer que $v^T v' = 0$, lo que equivale a $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ y que $\|v'\| = 1$. De las tres ecuaciones lineales se obtiene $x_3 = x_1, 2x_2 = -2x_1$ y $2x_4 = 2x_1$. Entonces, $(x_1, -x_1, x_1, x_1)^T$ es un vector en $Ker(A - I)$ ortogonal a v. Tomando $x_1 = 1$ se obtiene $v' = (1, -1, 1, 1)^T$.

Observando que la norma de v es 1, y normalizando v', se concluye que

$$\{(1/2, 1/2, 1/2, -1/2)^T, (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)^T\}$$

es base ortonormal de $Ker(A - I)$ [**0.5 pts. por obtener la base ortonormal pedida**].

c) Al escalonar la matriz $A + I$ se llega a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigue que $Ker(A+I)$ tiene dimension 2 [**0.5 pts. por determinar la dimensión de $Ker(A+I)$, explícita o implícitamente**], por lo que -1 es un valor propio de A [**0.5 pts. por responder la pregunta ¿es -1 valor propio de A?**], y está generado por los vectores $(1,0,\text{-}1,0)^T$ y $(0,1,0,1)^T$. Estos son ortogonales de modo que para $w=(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2},0)^T$ y $w'=(0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})^T$, el conjunto $\{w,w'\}$ es una base ortonormal de $Ker(A+I)$ [**0.5 pts. por obtener la base ortonormal pedida**].

d) Como la matriz A es simétrica sabemos que los espacios de vectores propios W_1 y $W_{\text{-}1}$ son ortogonales de modo que $\{v,v',w,w'\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de A. Sabemos que en este caso, $A=PDP^T$, donde

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad y \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[**0.5 pts. por argumentar que los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales**], [**0.5 pts. por indicar cómo obtener P desde la base ortonormal o por explicitar P**] y [**0.5 pts. por indicar cómo obtener D desde los valores propios o por explicitar D**].

Indicaciones para la corrección:

- En la parte c), no es necesario escalonar. También podrían argumentar que las columnas de $A+I$ generan un espacio de dimension 2 (es decir, que $Im(A)$ tiene dimensión 2), usar el Teorema Núcleo Imagen para deducir que $Ker(A+I)$ tiene dimensión $4-2=2$, y "adivinar" dos vectores linealmente independientes en el núcleo. Dar puntaje completo por este argumento (distribuir puntajes igual como se indica en la pauta).

P3. a) Sea $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica. Sean además, $\lambda\in\mathbb{R}$, $u=(0,1,1)^T$, $v=(1,1,1)^T$ y $w=(0,1,\text{-}1)^T$ tales que

$$Au=\lambda u, \qquad Av=3v, \qquad \text{y} \qquad Aw=0.$$

1) (1.5 pts.) Pruebe que $\lambda=3$.
2) (1.5 pts.) Determine $D,P\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ donde D es diagonal, P es invertible, $P^{-1}=P^T$, tales que $A=PDP^T$.

b) Sea $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y $\{v_1,...,v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de B asociados a los valores propios $\lambda_1,...,\lambda_n$, respectivamente. Sea C la matriz definida por:

$$C=B+v_1v_1^T,$$

1) (1.5 pts.) Pruebe que v_i es vector propio de C, cualquiera sea $i\in[n]$.
2) (1.5 pts.) ¿Es C diagonalizable? Justifique.

Solución:

a) 1) Del enunciado y la definición de valor propio, sigue que λ y 3 son valores propios de A con vectores propios asociados u y v, respectivamente [**0.5 pts. por decir que u y v son vectores propios**].

Como A es simétrica, vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales [**0.5 pts. por hacer referencia, implícita o explícitamente, a este resultado**]. Pero, u y v no son ortogonales (ya que $\langle u,v\rangle=2\neq 0$). Luego, u y v deben ser vectores propios asociados al mismo valor propio. Por lo observado en el párrafo anterior, sigue que $\lambda=3$ [**0.5 pts. por concluir y justificar correctamente**].

2) De la parte anterior sabemos que u y v son vectores propios asociados al valor propio 3. Del enunciado tenemos que $Aw=0\cdot w$. Luego, por definición de valor propio, sigue que w es vector

propio de A asociado al valor propio 0 [**0.4 pts. por identificar todos los valores y vectores propios asociados a** A].

Para descomponer A en la forma PDP^T necesitamos encontrar una base de vectores propios ortonormales de $\mathbb{R}^3$ (Teorema de Diagonalizacion de Matrices Simétricas). Aplicamos Gram-Schmidt para encontrar bases ortonormales de $W_3 = \langle\{u, v\}\rangle$ y $W_0 = \langle\{w\}\rangle$ obteniendo que

$$\begin{aligned} W_3 &= \langle\{(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T, (1, 0, 0)^T\}\rangle, \\ W_0 &= \langle\{(0, 1/\sqrt{2}, \text{-}1/\sqrt{2})^T\}\rangle. \end{aligned}$$

[**0.6 pts. por aplicar Gram-Schmidt (descontar -0.3 pts. por cada error aritmético)**]

Luego, basta con tomar:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & \text{-}1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[**0.5 pts. por concluir correctamente**]

b) 1) En efecto, si $i \neq 1$,

$$\begin{aligned} Cv_i &= (B + v_1 v_1^T)v_i && \text{(por definición de } C \text{ [}\mathbf{0.2\ pts}\text{])} \\ &= Bv_i + v_1(v_1^T v_i) && \text{(por álgebra matricial [}\mathbf{0.2\ pts}\text{])} \\ &= Bv_i && \text{(porque } \{v_1, ..., v_n\} \text{ es ortogonal, luego } v_1^T v_i = \langle v_1, v_i\rangle = 0 \text{ si } i \neq 1 \text{ [}\mathbf{0.2\ pts}\text{])} \\ &= \lambda_i v_i. && \text{(porque } v_i \text{ es vector propio de } B \text{ asociado al valor propio } \lambda_i \text{ [}\mathbf{0.2\ pts}\text{])} \end{aligned}$$

Sigue que v_i es vector propio de C asociado al valor propio λ_i cualquiera sea $i \neq 1$ [**0.2 pts. por identificar el valor propio asociado a** v_i **para** $i \neq 1$].

Análogamente,

$$\begin{aligned} Cv_i &= (B + v_1 v_1^T)v_1 && \text{(por definición de } C\text{)} \\ &= Bv_1 + v_1(v_1^T v_1) && \text{(por álgebra matricial)} \\ &= Bv_1 + v_1 && \text{(porque } \{v_1, ..., v_n\} \text{ es ortonormal, luego } v_1^T v_1 = \|v_1\|^2 = 1 \text{ [}\mathbf{0.3\ pts}\text{])} \\ &= (\lambda_1 + 1)v_1. && \text{(porque } v_1 \text{ es vector propio de } B \text{ asociado al valor propio } \lambda_1\text{)} \end{aligned}$$

Sigue que v_1 es vector propio de C asociado al valor propio $1 + \lambda_1$ [**0.2 pts. por identificar el valor propio asociado a** v_1].

2) **Primera forma:** Observar que

$$\begin{aligned} C^T &= (B + v_1 v_1^T)^T && \text{(por definición de } C\text{)} \\ &= B^T + (v_1^T v_1)^T && \text{(por propiedad de la trasposición)} \\ &= B + v_1^T v_1 && \text{(por propiedad de la trasposición y porque } B \text{ es simétrica)} \\ &= C. && \text{(por definición de } C\text{)} \end{aligned}$$

Luego, C es simétrica [**1.0 pts. por justificar que** C **es simétrica**] y por lo tanto diagonalizable (por resultado visto) [**0.5 pts. por concluir**].

Segunda forma: De la parte anterior $v_1, ..., v_n$ son vectores propios de C [**0.5 pts. por observar lo anterior**]. Por enunciado, $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ [**0.5 pts. por observar lo anterior**]. Luego, $\{v_1, ..., v_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de C. Por caracterización de matrices diagonalizables, C es diagonalizable [**0.5 pts. por invocar la caracterización y concluir**].

Indicaciones para la corrección:

- En la parte a.2), las columnas de P y D podrían darlas en un orden distinto. Lo único importante es que los valores propios en la diagonal de D estén en el mismo orden que los vectores propios asociados en P.

Tiempo: 3.0 hrs.