Pauta de corrección Control 3

P1. Considere la función $F\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(x)\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

a) **(2,5 pts.)** Justifique que F es derivable y muestre que

$$x\big(\ln(x)\big)^2 F'(x) = x - \ln(x)F(x).$$

Solución

Notemos que

$$F(x) = \frac{1}{\ln(x)}\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$ **(0,3 pts. por factorizar $\frac{1}{\ln(x)}$)**

Así, $F(x)$ es el producto de $\frac{1}{\ln(x)}$ y $\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.
El primer factor es derivable al ser el recíproco de una función derivable.

(0,3 pts. por justificar que $\frac{1}{\ln(x)}$ es derivable)

El segundo factor también es derivable por el teorema fundamental del cálculo, ya que $\frac{1}{\ln(t)}$ es continua.

(0,5 pts. por justificar que $\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ es derivable)

Más aún, su derivada es $\frac{1}{\ln(x)}$. **(0,5 pts. por encontrar la derivada de $\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$)**

Así,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)'\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\ln(x)}\left(\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t\right)' && \textbf{(0,3 pts. por usar la regla del producto)}\\
&= -\frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^2}\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{\ln(x)} && \textbf{(0,3 pts. por derivar)}\\
&= -\frac{1}{x\ln(x)}\int_2^x \frac{1}{\ln(x)\ln(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\big(\ln(x)\big)^2}\\
&= \frac{1}{\big(\ln(x)\big)^2} - \frac{1}{x\ln(x)}F(x).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $x\big(\ln(x)\big)^2$ se obtiene lo deseado. **(0,3 pts. por obtener el resultado)**

b) **(0,5 pts.)** Calcule $F'(2)$.

Solución

Reemplazando $x=2$ en la igualdad de la parte anterior vemos que

$$2\big(\ln(2)\big)^2 F'(2) = 2 - \ln(2)F(2).$$ **(0,2 pts. por reemplazar)**

Además,

$$F(2) = \int_2^2 \frac{1}{\ln(x)\ln(t)}\,\mathrm{d}t = 0,$$ **(0,2 pts. por mostrar que $F(2)=0$)**

de donde

$$2\big(\ln(2)\big)^2 F'(2) = 2 \implies F'(2) = \frac{1}{\big(\ln(2)\big)^2}. \qquad \textbf{(0,1 pts. por despejar y obtener el resultado)}$$

c) **(2,5 pts.)** Justifique que F' es derivable y muestre que

$$x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = \ln(x)(2+\ln(x))F(x) - 3x.$$

Solución

De la parte a), tenemos que

$$x\big(\ln(x)\big)^2 F'(x) = x - \ln(x)F(x).$$

Aquí se puede despejar $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{x - \ln(x)F(x)}{x\big(\ln(x)\big)^2}.$$

Vemos que se obtiene una función derivable por álgebra de funciones derivables: es una combinación de polinomios, logaritmos y $F(x)$ (que ya justificamos que es derivable). Así, $F'(x)$ es derivable.

(0,6 pts. por justificar que F' es derivable)

Primera forma para calcular $F''(x)$ (derivando la igualdad de la parte a))

Podemos derivar la igualdad de la parte a) para obtener:

$$\Big(x\big(\ln(x)\big)^2\Big)' F'(x) + x\big(\ln(x)\big)^2 F''(x) = x' - \Big(\ln(x)F'(x) + \big(\ln(x)\big)' F(x)\Big)$$

(0,3 pts. por usar la regla del producto)

$$\implies \Big(\big(\ln(x)\big)^2 + 2\ln(x)\Big) F'(x) + x\big(\ln(x)\big)^2 F''(x) = 1 - \ln(x)F'(x) - \frac{F(x)}{x}$$

(0,4 pts. por usar las reglas del producto y de la cadena)

$$\implies x\big(\ln(x)\big)^2 F''(x) = 1 - (\ln(x)+3)\ln(x)F'(x) - \frac{F(x)}{x} \qquad \textbf{(0,3 pts. por reordenar)}$$

$$\implies x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = x\ln(x) - (\ln(x)-3)x^2\big(\ln(x)\big)^2 F'(x) - \ln(x)F(x)$$

(0,3 pts. por multiplicar por $x\ln(x)$)

$$\implies x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = x\ln(x) - (\ln(x)-3)(x - \ln(x)F(x)) - \ln(x)F(x)$$

(0,3 pts. por usar la parte a))

$$\implies x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = x\ln(x) - x\ln(x) + \big(\ln(x)\big)^2 F(x) - 3x + 3\ln(x)F(x) - \ln(x)F(x)$$

$$\implies x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = 2\ln(x)F(x) + \big(\ln(x)\big)^2 F(x) - 3x$$

$$\implies x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = \ln(x)(2+\ln(x))F(x) - 3x. \qquad \textbf{(0,3 pts. por obtener el resultado)}$$

Segunda forma para calcular $F''(x)$ (derivando $F'(x)$)

Podemos derivar la expresión para $F'(x)$ para obtener:

$$F''(x) = \frac{(x - \ln(x)F(x))' x\big(\ln(x)\big)^2 - (x - \ln(x)F(x))\left(x\big(\ln(x)^2\big)\right)'}{x^2\big(\ln(x)\big)^4}$$

(0,3 pts. por usar la regla del cociente)

$$= \frac{\left(1 - \frac{F(x)}{x} - \ln(x)F'(x)\right)x\big(\ln(x)\big)^2 - (x - \ln(x)F(x))\left(\big(\ln(x)\big)^2 + 2\ln(x)\right)}{x^2\big(\ln(x)\big)^4}$$

(0,4 pts. por usar las reglas del producto y de la cadena)

$$= \frac{\ln(x)\left(x\ln(x) - \ln(x)F(x) - x\big(\ln(x)\big)^2F'(x) - (x - \ln(x)F(x))(\ln(x) + 2)\right)}{x^2\big(\ln(x)\big)^4}$$

(0,3 pts. por factorizar $\ln(x)$)

$$= \frac{x\ln(x) - \ln(x)F(x) - x\big(\ln(x)\big)^2F'(x) - x\ln(x) - 2x + \big(\ln(x)\big)^2F(x) + 2\ln(x)F(x)}{x^2\big(\ln(x)\big)^3}$$

$$= \frac{-x\big(\ln(x)\big)^2F'(x) - 2x + \big(\ln(x)\big)^2F(x) + \ln(x)F(x)}{x^2\big(\ln(x)\big)^3}$$ **(0,3 pts. por simplificar)**

$$= \frac{-x + \ln(x)F(x) - 2x + \big(\ln(x)\big)^2F(x) + \ln(x)F(x)}{x^2\big(\ln(x)\big)^3}$$ **(0,3 pts. por usar la parte a))**

$$= \frac{2\ln(x)F(x) + \big(\ln(x)\big)^2F(x) - 3x}{x^2\big(\ln(x)\big)^3}$$

$$= \frac{\ln(x)(2 + \ln(x))F(x) - 3x}{x^2\big(\ln(x)\big)^3}.$$

Multiplicando ambos lados por $x^2\big(\ln(x)\big)^3$ se obtiene el resultado.

(0,3 pts. por obtener el resultado)

d) **(0,5 pts.)** Calcule $F''(2)$.

Solución

Reemplazando $x = 2$ en la igualdad de la parte anterior vemos que

$$4\big(\ln(2)\big)^3F''(2) = \ln(2)(2 + \ln(2))F(2) - 6.$$ **(0,2 pts. por reemplazar)**

Además, ya sabemos que $F(2) = 0$. **(0,2 pts. por mostrar que $F(2) = 0$)**
Así,

$$4\big(\ln(2)\big)^3F''(2) = -6 \implies F''(2) = -\frac{3}{2\big(\ln(2)\big)^3}.$$ **(0,1 pts. por despejar y obtener el resultado)**

P2. a) **(3,0 pts.)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$ delimitada por las curvas $x = y^2 - y - 6$, $x = 2y + 4$ y $x = 4y$ (vea la Figura 1).

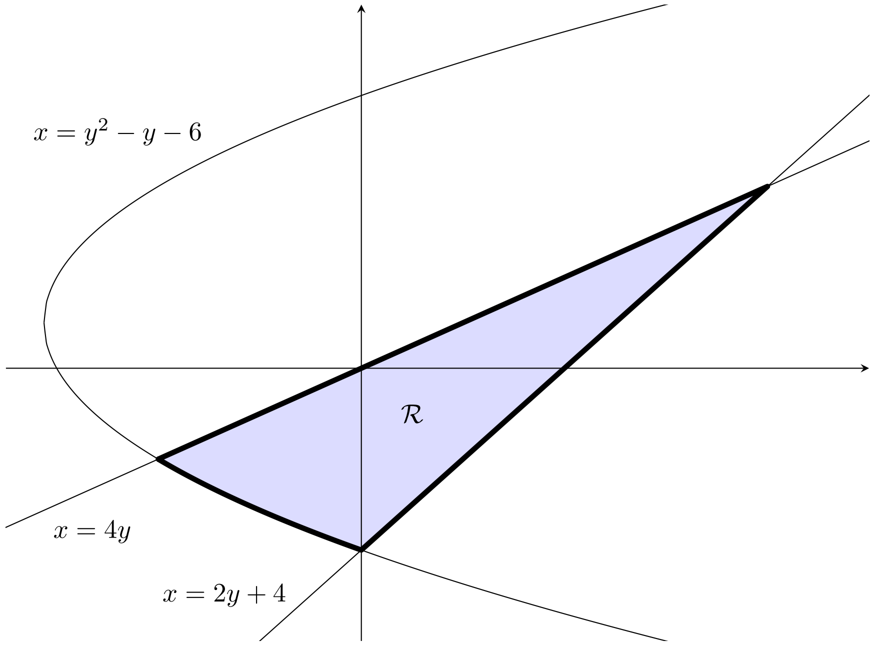


Figura 1: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

Solución

Comenzamos encontrando los puntos de intersección entre cada par de curvas.
Podemos encontrar la intersección entre $x = y^2 - y - 6$ y $x = 2y + 4$ igualando ambas expresiones:

$$y^2 - y - 6 = 2y + 4 \qquad \textbf{(0,1 pts. por plantear la ecuación)}$$

$$\iff y^2 - 3y - 10 = 0 \iff y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}, \qquad \textbf{(0,1 pts. por resolver la ecuación)}$$

de donde $y = -2$ o $y = 5$. Como se ve en la figura, el punto que nos interesa tiene coordenada y negativa, así que obtenemos $y = -2$. Reemplazando en $x = 2y + 4$, vemos que el punto de intersección es $(0, -2)$.
(0,1 pts. por encontrar la intersección)

Ahora, intersectamos $x = 2y + 4$ y $x = 4y$. Obtenemos:

$$2y + 4 = 4y \qquad \textbf{(0,1 pts. por plantear la ecuación)}$$

$$\iff y = 2. \qquad \textbf{(0,1 pts. por resolver la ecuación)}$$

Reemplazando en $x = 4y$, el punto de intersección es $(8, 2)$. **(0,1 pts. por encontrar la intersección)**
Finalmente, la buscamos la intersección entre $x = 4y$ y $x = y^2 - y - 6$. Tenemos

$$y^2 - y - 6 = 4y \qquad \textbf{(0,1 pts. por plantear la ecuación)}$$

$$\iff y^2 - 5y - 6 = 0 \iff y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}, \qquad \textbf{(0,1 pts. por resolver la ecuación)}$$

de donde $y = -1$ o $y = 6$. Como la intersección en la figura tiene coordenada y negativa, obtenemos $y = -1$. Reemplazando en $x = 4y$, resulta el punto $(-4, -1)$. **(0,1 pts. por encontrar la intersección)**

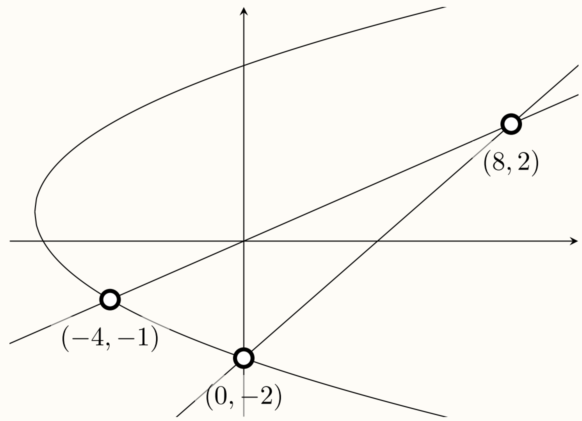


Figura 2: Puntos de intersección.

El área buscada A se puede calcular de varias formas:

Primera forma (integrando a lo largo del eje horizontal)

Podemos despejar y en función de x en la ecuación $x = y^2 - y - 6$ para obtener

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{4x+25}}{2}.$$

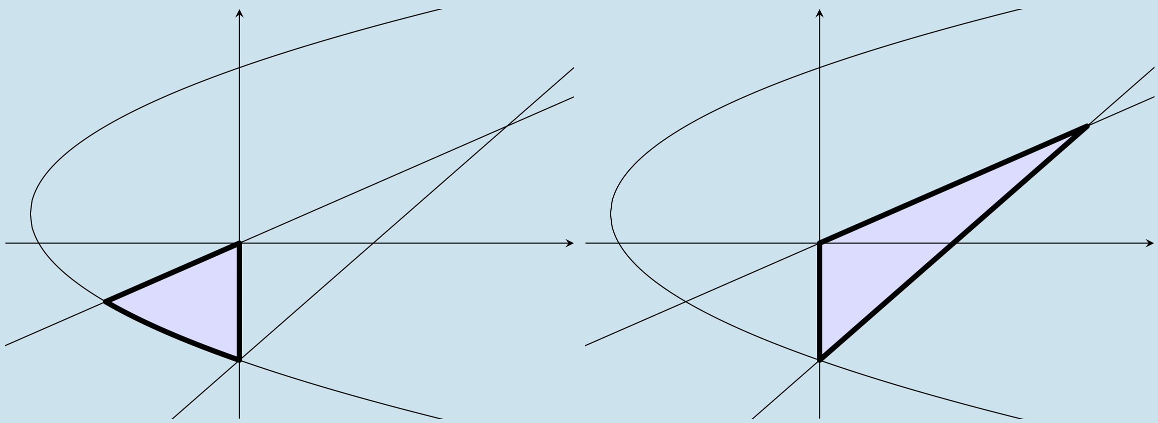
Además, podemos descartar la solución positiva porque el área buscada solo está delimitada por la parte inferior de la curva. **(0,1 pts. por despejar y en función de x)**

Así, vemos que $A = A_1 + A_2$ donde

$$A_1 = \int_{-4}^{0} \left(\frac{x}{4} - \frac{1-\sqrt{4x+25}}{2} \right) \mathrm{d}x, \qquad A_2 = \int_{0}^{8} \left(\frac{x}{4} - \frac{x-4}{2} \right) \mathrm{d}x.$$

(0,5 pts. por dividir las áreas en las regiones adecuadas)
(0,5 pts. por llegar a la integral correcta para cada área)

Las regiones consideradas para obtener estas áreas se ilustran en la Figura 3.



(a) Región de área A_1.　(b) Región de área A_2.

Figura 3: Esquema de las áreas.

Podemos calcular estas integrales directamente:

$$A_1 = \int_{-4}^{0} \left(\frac{x}{4} - \frac{1-\sqrt{4x+25}}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{8} - \frac{x - \frac{1}{6}(4x+25)^{3/2}}{2} \right] \Bigg|_{-4}^{0}$$
$$= \frac{1}{24} \left[3x^2 - 12x + 2(4x+25)^{3/2} \right] \Big|_{-4}^{0} = \frac{250-150}{24} = \frac{25}{6}$$

(0,4 pts. por calcular la integral y encontrar A_1) y

$$A_2 = \int_{0}^{8} \left(\frac{x}{4} - \frac{x-4}{2} \right) \mathrm{d}x = \int_{0}^{8} \left(2 - \frac{x}{4} \right) \mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^2}{8} \right) \Bigg|_{0}^{8} = 16 - \frac{64}{8} = 8.$$

(0,4 pts. por calcular la integral y encontrar A_2)

Así, obtenemos que

$$A = A_1 + A_2 = \frac{25}{6} + 8 = \frac{73}{6}.$$

(0,2 pts. por obtener el área A total)

Alternativa

También se puede calcular A_2 sin usar integrales: notando que es el área de un triángulo de base 2 y altura 8.

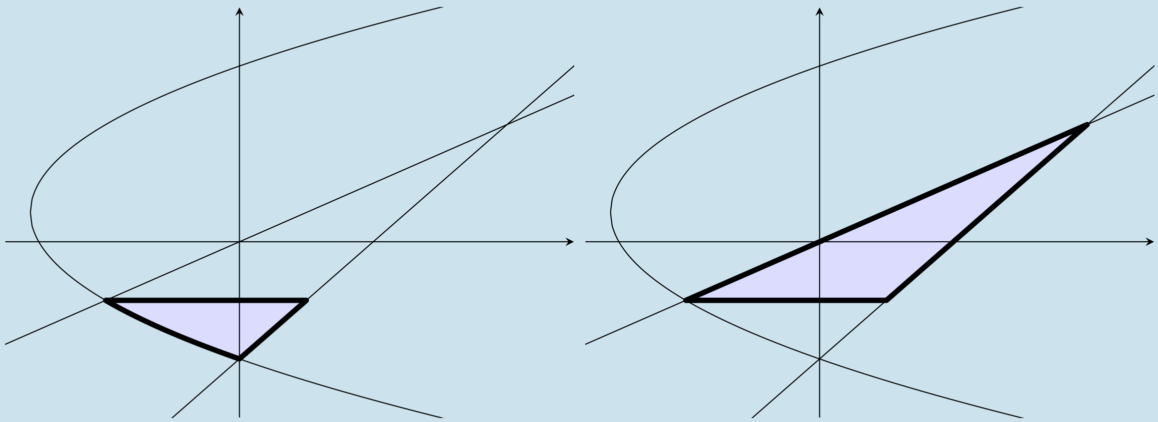
Segunda forma (integrando a lo largo del eje vertical)

Tenemos que $A = A_1 + A_2$ donde

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (2y+4) - (y^2 - y - 6)\,\mathrm{d}y, \qquad A_2 = \int_{-1}^{2} (2y+4) - 4y\,\mathrm{d}y.$$

(0,5 pts. por dividir las áreas en las regiones adecuadas)
(0,5 pts. por llegar a la integral correcta para cada área)

Las regiones consideradas para obtener estas áreas se ven en la Figura 4.



(a) Región de área A_1. (b) Región de área A_2.

Figura 4: Esquema de las áreas.

Calculamos:

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (2y+4) - (y^2 - y - 6)\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{-1} (-y^2 + 3y + 10)\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + 10y \right]\Bigg|_{-2}^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 10 \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - 20 \right) = -\frac{49}{6} - \left(-\frac{34}{3} \right) = \frac{19}{6}.$$

(0,4 pts. por calcular la integral y encontrar A_1)

Además,

$$A_2 = \int_{-1}^{2} (2y+4) - 4y\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} 4 - 2y\,\mathrm{d}y = \left[4y - y^2 \right]\Bigg|_{-1}^{2} = 4 - (-5) = 9.$$

(0,4 pts. por calcular la integral y encontrar A_2)

Así, obtenemos que

$$A = A_1 + A_2 = \frac{19}{6} + 9 = \frac{73}{6}.$$

(0,3 pts. por obtener el área A total)

Alternativa

También se puede calcular A_2 sin usar integrales: notando que es el área de un triángulo de base 6 y altura 3.

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule la longitud de la curva que define f.

Solución

Tenemos que

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = 3\sqrt{x}.$$

(1,0 pto. por calcular la primera derivada)

Así,

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2} = \sqrt{1 + 9x}.$$

(1,0 pto. por este cálculo)

Luego, el largo buscado es

$$\int_0^1 \sqrt{1+9x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2}{27}\left((1+9)^{3/2} - 1\right) = \frac{2}{27}(10^{3/2} - 1).$$

(1,0 pto. por calcular la integral)

P3. a) **(3,0 pts.)** Analice la convergencia de la integral

$$\int_{1^+}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x.$$

Solución

La integral es una integral impropia de tercera especie. Por lo tanto, debemos separarla en varias integrales para analizar su convergencia:

$$\int_{1^+}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x = \int_{1^+}^{2} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x.$$

(0,4 pts. por separar las integrales en los casos necesarios)

Veremos que ambos sumandos son convergentes.

Primera forma para ver que el primer sumando es convergente (Comparación)

Tenemos que

$$\frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}} \leq \frac{1}{(x-1)^{5/7}}$$

(0,5 pts. por acotar superiormente el cociente)

para todo $x \in (1, 2]$. Por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_{1^+}^{2} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ es convergente si $\displaystyle\int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ lo es. **(0,5 pts. por aplicar el criterio de comparación correctamente)**

La última integral es conocidamente convergente, ya que $\frac{5}{7} < 1$

(0,5 pts. por justificar que $\displaystyle\int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ es convergente).

Segunda forma para ver que el primer sumando es convergente (Cociente)

Podemos usar el criterio del cociente para ver que la integral $\int_{1^+}^{2} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ tiene el mismo comportamiento que $\int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}}{\frac{1}{(x-1)^{5/7}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x^2} = 1 \neq 0.$$

(0,5 pts. por aplicar correctamente el criterio del cociente)

Como $\int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ es conocidamente convergente,

(0,5 pts. por justificar que $\int_{1^+}^{2} \frac{1}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ es convergente)

$\int_{1^+}^{2} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ también lo es.

(0,5 pts. por concluir que $\int_{1^+}^{2} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ es convergente)

Primera forma para ver que el segundo sumando es convergente (Comparación con x^{-2})

Ahora, tenemos que

$$\frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}} \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

(0,5 pts. por acotar superiormente el cociente)

para todo $x \in [2, \infty)$, donde usamos que $(x-1) \geq 1$ en este intervalo, y la desigualdad fundamental de la exponencial para ver que $e^{x^2} \geq 1 + x^2$. Por lo tanto, la integral $\int_{2}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente si $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ lo es. **(0,3 pts. por aplicar el criterio de comparación correctamente)**

La última integral es conocidamente convergente, ya que $2 > 1$.

(0,2 pts. por justificar que $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente)

Segunda forma para ver que el segundo sumando es convergente (Comparación con e^{-x^2})

Si $x \geq 2$ se tiene que $(x-1)^{5/7} \geq 1$. Además, como la exponencial es siempre positiva,

$$0 < \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}} \leq e^{-x^2}.$$

Como $x < x^2$ si $x \geq 2$, entonces $-x > -x^2$ y como la función exponencial es estrictamente creciente, se tiene que $e^{-x^2} < e^{-x}$. Por lo tanto, si $x \geq 2$ se tiene que

$$0 < \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}} \leq e^{-x^2} < e^{-x}.$$

(0,5 pts. por acotar superiormente el cociente)

Así, si $\int_2^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ es convergente, $\int_2^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ también lo es.

(0,3 pts. por aplicar el criterio de comparación correctamente)

Finalmente,

$$\int_2^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \left[-e^{-t}\right]\Big|_2^x = \lim_{x\to\infty} (-e^{-x} - (-e^{-2})) = e^{-2},$$

por lo que es convergente. **(0,2 pts. por justificar que $\int_2^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ es convergente)**

Así, ambos sumandos son convergentes, por lo que $\int_{1^+}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

(0,1 pts. por concluir)

b) **(3,0 pts.)** Analice la convergencia de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{2+\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Solución

Esta es una integral impropia de primera especie.
Notemos que $2+\cos(x)$ y $2+\operatorname{sen}(x)$ pertenecen al intervalo $[1,3]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\frac{2+\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. **(1,0 pto. por acotar inferiormente el cociente)**

Además, tenemos que la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$$

diverge. **(1,0 pto. por justificar que esa integral es divergente)**

Así, el criterio de comparación muestra que $\int_0^{\infty} \frac{2+\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,\mathrm{d}x$ también lo hace.

(1,0 pto. por aplicar correctamente el criterio de comparación)