PAUTA CONTROL 3

<- +

P1. (a) (3 pt) Encuentre la solución de la EDO usando transformada de Laplace:

$$y'' + y = \delta_\pi - \delta_{2\pi}, \quad y(0^+) = 0,\ y'(0^+) = 1,$$

donde δ_a denota la masa de Dirac en $t = a$. Determine de forma explícita la fórmula para $y(t)$ en los intervalos $[0, \pi)$, $[\pi, 2\pi)$ y $[2\pi, \infty)$.

Solución

Aplicamos transformada a la ecuación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' + y\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta_\pi\}(s) - \mathcal{L}\{\delta_{2\pi}\}(s) \\
s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - 1 + \mathcal{L}\{y\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta_\pi\}(s) - \mathcal{L}\{\delta_{2\pi}\}(s) \\
&= e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow (s^2+1)\mathcal{L}\{y\}(s) &= 1 + e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} \\
\mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \quad \leftarrow [1 \text{ pt}]
\end{aligned}$$

Si hay un error de cálculo, o al evaluar la condición inicial en la transformada, solo otorgar 0.5 pt

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} &= \mathcal{L}\{H(t-\pi)\sin(t-\pi)\}(s) \quad \leftarrow [0.25 \text{ pt}] \\
\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} &= \mathcal{L}\{H(t-2\pi)\sin(t-2\pi)\}(s) \quad \leftarrow [0.25 \text{ pt}]
\end{aligned}$$

Si se olvidan de incluir $H(t-\pi)$ y $H(t-2\pi)$, solo dar 0,2 pt en total.

Como:

$$\begin{aligned}
\sin(t-\pi) &= \sin(t)\cos(-\pi) + \cos(t)\sin(-\pi) \\
&= \sin(t)\cdot(-1) + \cos(t)\cdot 0 \\
&= -\sin(t) \quad \leftarrow [0.1 \text{ pt}]
\end{aligned}$$

y además:

$$\sin(t-2\pi) = \sin(t) \quad \leftarrow [0.1 \text{ pt}]$$

Con ello:

$$y(t) = \sin(t) + H(t-\pi)\sin(t-\pi) - H(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$$

que también se puede escribir como:

$$y(t) = \sin(t) + H(t-\pi)(-\sin(t)) - H(t-2\pi)\sin(t) \quad \leftarrow [0.3 \text{ pt}]$$

Así:

$$y(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } t \in [0,\pi) \\ \sin t - \sin t = 0 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi) \\ \sin t - \sin t - \sin t = -\sin t & \text{si } t \in [2\pi, \infty) \end{cases} \quad \leftarrow [1 \text{ pt}]$$

Bajar 0.3 pt por error en algún intervalo.

(b) (3 pt) Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial:

$$y' = \sin(t) + \int_0^t y(t-r)\cos(r)dr, \quad y(0^+) = 0.$$

Solución

$$\frac{dy}{dt}(t) = \sin(t) + \int_0^t y(t-r)\cos(r)\,dr, \quad y(0^+) = 0$$

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados de la EDO se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\sin(t) + \int_0^t f(t-r)\cos(r)\,dr\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) + \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-r)\cos(r)\,dr\right\}(s) \quad \leftarrow [0.1 \text{ pt}] \end{aligned}$$

Calculando la transformada de Laplace de cada término:

$$\rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}(t)\right\}(s) = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0^+) = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \quad \leftarrow [0.2 \text{ pt}]$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \leftarrow [0.2 \text{ pt}]$$

Usando el Teorema de Convolución:

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(t-r)\cos(r)\,dr\right\}(s) &= \mathcal{L}\{y(t)\}(s)\mathcal{L}\{cos(t)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{y(t)\}(s)\ \frac{s}{s^2+1} \quad \leftarrow [0.5 \text{ pt}] \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo

$$s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}\{y(t)\}(s)\frac{s}{s^2+1}$$

+ 0.1 pts

Agrupando términos:

$$\left[s - \frac{s}{s^2+1}\right] \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) \quad = \quad \frac{1}{s^2+1}$$ <- +0.4 pts

$$\left[\frac{s(s^2+1) - s}{s^2+1}\right] \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) \quad = \quad \frac{1}{s^2+1}$$ <- +0.3 pts

$$\frac{s^3}{s^2+1} \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) \quad = \quad \frac{1}{s^2+1}$$ <- + 0.3 pts

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) \quad = \quad \frac{1}{s^3} \quad \leftarrow [1.5 \text{ pt}]$$ <- + 0.4 pts

$$\text{Pero se tiene } \mathcal{L}\left\{t^2\right\}(s) \quad = \quad \frac{2}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$$ = 1/2 * (2 / s^(2+1)) <- +0.2

Luego, aplicando la antitransformada de Laplace se obtiene

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2}.$$ [redacted] <- + 0.3

P2. Considere el sistema lineal de primer orden $x'(t) = Ax(t)$ para

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicación: el determinante de una matriz de 3x3 está dado en términos de determinantes de submatrices de 2x2 por:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

(a) (1 pt) Deduzca que el polinomio característico de A está dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2$$

y a partir de esto determine los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.

Solución

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2 - 1\right] - 1\left[(-1-\lambda) - (-1)\right] \\ &\quad -1\left[1 - (-1)(-1-\lambda)\right] \\ &= (-1-\lambda)\left[(1+\lambda)^2 - 1\right] + \lambda + \left[-1 + 1 + \lambda\right] \\ &= (-1-\lambda)\left[(1+\lambda-1)(1+\lambda+1)\right] + 2\lambda \\ &= (-1-\lambda)\lambda(2+\lambda) + 2\lambda \\ &= \lambda\left[(-1-\lambda)(2+\lambda) + 2\right] \\ &= \lambda\left[-\lambda^2 - 3\lambda - 2 + 2\right] \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 \qquad \leftarrow [0.5 \text{ pt}] \end{aligned}$$

Luego,

$$p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 3)$$

y las raíces de $p(\lambda)$ son los valores propios de A:

$$\begin{aligned} \lambda = -3 &\quad \Rightarrow \quad \text{multiplicidad } 1 \\ \lambda = 0 &\quad \Rightarrow \quad \text{multiplicidad } 2 \end{aligned}$$

[redacted] +0.2 por dar las soluciones
+0.3 por decir multiplicidades

Descontar 0.2 pts si no se indica la multiplicidad 2 de $\lambda = 0$.

(b) (2 pt) Encuentre los vectores propios de A y las dimensiones de los subespacios propios asociados. ¿Por qué la matriz A es diagonalizable?

Solución

Cálculo de vectores propios:
Valor propio $\lambda_1 = -3$.
Como $-1+3=2$ el sistema $(A-\lambda_1 I)v_1 = 0$ queda

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ +0,2

Hay dos ecuaciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Combinando ambas y despejando x_2 y x_3 en términos de x_1:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \\ x_3 &= 2x_1 + x_2 \Rightarrow x_3 = 2x_1 - x_1 = x_1 \end{aligned}$$ ← +0,3

Y tomando por ejemplo $x_1 = 1$ se obtiene $x_2 = -x_1 = -1$ y $x_3 = x_1 = 1$, por lo que el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -3$ es:

$$v_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ ← +0,2

Nota: Sirve cualquier vector que sea colineal con el entregado en la pauta.
Dimensión del espacio propio: 1 ← [0.2 pt]

Valor propio $\lambda_2 = 0$.
Como $-1-0=-1$ el sistema $(A-\lambda_1 I)v_2 = 0$ queda

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ +0,2

Vemos que las dos últimas filas de la matriz son l.d. con la primera, así que la dimensión del

$$\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ es } 2$$

Nota: Lo mismo se puede argumentar mencionando que la dimensión del subespacio nulo (propio) es igual a la multiplicidad del valor propio, si se asume que la matriz es diagonalizable. A esto se le asigna puntaje más abajo.

Encontramos los vectores propios resolviendo:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ \implies x_3 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Si se toma $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ se obtiene $x_3 = 1$, si se toma $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ se obtiene $x_3 = -1$. Con esto se obtiene el vector propio en el subespacio: ← +0,3

$$v_2 \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \longleftarrow \ +0{,}2$$

Si solo se encuentra 1 vector propio dar 0.7 pts.
Nota: En la elección de x_1 y x_2 se puede tomar dos valores cualesquiera de (x_1, x_2) con los que se calcule x_3, tales que, se obtenga dos vectores propios l.i. Asimismo, este procedimiento se puede realizar escogiendo valores de (x_1, x_3) para calcular x_2 o valores de (x_2, x_3) para calcular x_1.
Y la dimensión del subespacio propio asociado:

$$\dim \ker(A - 0 \cdot I) = 2 \qquad +0{,}2$$

La matriz A es diagonalizable, pues tenemos 3 vectores propios l.i. También se puede obtener a priori que la matriz es diagonalizable si se hace la observación de que es simétrica o normal. +0,2

(c) (1 pt) Sea $U = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \mid x \text{ es solución de } x' = Ax\}$ el espacio vectorial de las soluciones del sistema. Determine una base de U.

Solución

Base de soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$:

$$e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Base:} \quad \left\langle e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \leftarrow [1 \text{ pt}]$$

Esta es la base del espacio de soluciones, pues en $t = 0$ son l.i.
Notas: a) Solo deben encontrar la base, no justificar, eso lo vimos en clases.
b) Es igualmente válido encontrar la base de soluciones usando que $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x_o} = \mathbf{P}\exp(\mathbf{D}t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x_o}$ y que $\mathbf{x_o}$ es cualquiera (luego también puede escribir $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x_o} = \mathbf{P}\exp(\mathbf{D}t)\mathbf{c}$) , para luego identificar el conjunto fundamental de soluciones.
c) Si falta una solución descontar 0.4 pt

(d) (1 pt) Determine $V \subset U$, el subespacio de todas las soluciones del sistema que convergen a 0 cuando $t \to \infty$ e indique su dimensión.

Solución

Si $x(t)$ es solución de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, entonces:

$$x(t) = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Observamos que $y(t)$ converge cuando $t \to \infty$

$$x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \leftarrow [0.4 \text{ pt}]$$

Por lo tanto:

$$x(t) \underset{t\to\infty}{\to} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Como los vectores $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ son l.i., $\Rightarrow C_2 = C_3 = 0$ $\leftarrow$ [0.4 pt]

Así: $x(t) = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Luego,

$$V = \left\langle e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \quad \text{tiene dimensión 1} \quad \leftarrow [0.2 \text{ pt}]$$

(e) (1 pt) Determine $W \subset U$, el subespacio de todas las soluciones del sistema que son constantes en t e indique su dimensión.

Solución

$$y(t) = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Es constante $\Leftrightarrow C_1 = 0$ $\leftarrow$[0.6 pt]

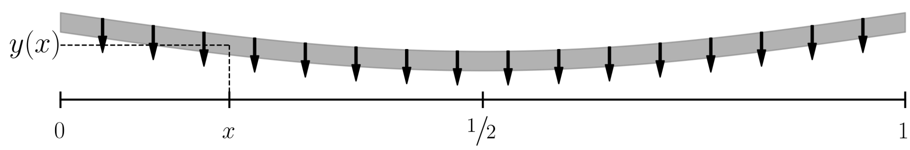
$$\Rightarrow W = \left\{ C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

por lo que tiene dimensión 2 $\leftarrow$[0.4 pt]

P3. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4}(x) - \frac{d^2y}{dx^2}(x) = 1 \quad x \in [0,1], \qquad (E)$$

que modela la deformación $y(x)$ de una viga con una rigidez constante, y sometida a una fuerza externa (lado derecho de la EDO) constante y unitaria, como se muestra en la figura siguiente:



y con condiciones de borde dadas por:

$$y(0) = y(1) = 0, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(1) = 0.$$

Se desea encontrar la deformación $y(x)$ de la viga para $x \in [0,1]$. Para ello supondremos que las constantes $a = \frac{dy}{dx}(0)$, $b = \frac{d^3y}{dx^3}(0)$ son conocidas.

(a) (1.5 pt) Usando fracciones parciales, pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \sinh(x) - x.$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2(s^2-1)} &= \frac{1}{s^2(s+1)(s-1)} \\
&= \frac{A+Bs}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1} \quad \text{(0,2 pts)} \\
&= \frac{(A+Bs)(s^2-1) + C\cdot s^2(s-1) + D\cdot s^2(s+1)}{s^2(s^2-1)} \\
&= \frac{s^3(B+C+D) + s^2(A-C+D) + s(-B) + (-A)}{s^2(s^2-1)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow s^3(B+C+D) + s^2(A-C+D) + s(-B) + (-A-1) = 0 \quad \text{(0,2 pts)}$$

Por independencia lineal de las funciones base de los polinomios:

$$
\begin{aligned}
B + C + D &= 0 \\
A - C + D &= 0 \\
-B &= 0 \\
-A &= 1 \quad \textcolor{red}{\text{(0,2 pts)}}
\end{aligned}
$$

Resolviendo:

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2} \quad \textcolor{red}{\text{(0,2 pts)}}$$

Entonces:

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}$$

Analizando los diferentes términos de las fracciones parciales:

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{s^2} &= \mathcal{L}\left\{-x\right\}(s) \quad \textcolor{red}{\text{(0,1 pts)}} \\
-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-x}\right\}(s) \quad \textcolor{red}{\text{(0,1 pts)}} \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{x}\right\}(s) \quad \textcolor{red}{\text{(0,1 pts)}}
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^2(s^2-1)} &= \mathcal{L}\left\{-x\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{x}\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{-x + \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\sinh(x) - x\right\}(s) \quad \textcolor{red}{\text{(0,2 pts)}}
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Lerch: (No es necesario mencionar el Teorema de Lerch, ya que se vió en cátedra.)

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \sinh(x) - x \quad \textcolor{red}{\text{(0,2 pts)}}$$

Si se realiza este ejercicio sin utilizar fracciones parciales que es el método que se quiere evaluar, solo otorgar un máximo de 0.5 pts.
Nota: En la pauta, sistemáticamente se optó por buscar la función de x cuya transformada de Laplace es igual la componente de la descomposición en fracciones parciales. De manera equivalente, se podría optar por tomar la anti-transformada de las fracciones parciales y determinar – por ejemplo, usando la tabla de transformadas – cual es la anti-transformada de cada componente de la descomposición en fracciones parciales.

(b) (1 pt) Usando el Teorema de Convolución, pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)}\right\} = \cosh(x) - \frac{x^2+2}{2}.$$

Solución

$$\frac{1}{s^3(s^2-1)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2(s^2-1)} \quad \text{(0,1 pts)}$$

$$\text{Pero} \quad \frac{1}{s} = \mathcal{L}\{1\}(s) \quad \text{(0,1 pts)}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \mathcal{L}\{\sinh(x)-x\}(s) \quad \leftarrow \text{de parte (a)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^3(s^2-1)} = \mathcal{L}\{1\}(s)\cdot\mathcal{L}\{\sinh(x)-x\}(s)$$

usando el Teorema de Convolución

$$\Rightarrow \frac{1}{s^3(s^2-1)} = \mathcal{L}\{1*(\sinh(x)-x)\}(s) \quad \text{(0,1 pts)}$$

donde $*$ denota el producto de convolución

$$1*(\sinh(x)-x) = \int_0^x (\sinh(\xi)-\xi)\cdot 1\,d\xi \quad \text{(0,1 pts)}$$

$$= \int_0^x \sinh(\xi)-\xi\,d\xi = \left[\cosh(\xi)-\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x$$

$$= \cosh(x) - \frac{x^2}{2} - \cosh(0) + 0$$

$$\text{Pero}\ \cosh(0) = \frac{1}{2}(e^0+e^0) = 1$$

$$\Rightarrow 1*(\sinh(x)-x) = \cosh(x) - \frac{x^2}{2} - 1 = \cosh(x) - \frac{x^2+2}{2} \quad \text{(0,3 pts)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^3(s^2-1)} = \mathcal{L}\left\{\cosh(x)-\frac{x^2+2}{2}\right\}(s) \quad \text{(0,1 pts)}$$

Por el teorema de Lerch: (No es necesario mencionar el Teorema de Lerch, ya que se vió en cátedra.)

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)}\right\} = \cosh(x) - \frac{x^2+2}{2} \quad \text{(0,2 pts)}$$

Si se realiza este ejercicio sin utilizar el Teorema de Convolución que es el método que se quiere evaluar, solo otorgar un máximo de 0.5 pt

(c) (1.5 pt) Encuentre la transformada de Laplace de la solución $y(x)$ de (E) en función de a y b.

Solución

Para despejar $\mathcal{L}\left\{y(x)\right\}(s)$ aplicamos transformada de Laplace a la EDO:

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} - \frac{d^2y(x)}{dx^2} = 1 \quad / \text{ aplicar } \mathcal{L}\left\{\cdot\right\}(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^4y(x)}{dx^4}\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{1\right\}(s) \quad \text{(0,3 pts)}$$

Analizando los términos, sea $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(x)\right\}(s)$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^4y(x)}{dx^4}\right\}(s) = s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y^{(3)}(0)$$

$$\text{con } y(0) = 0, \quad y'(0) = a, \quad y''(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = b$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{d^4y(x)}{dx^4}\right\}(s) = s^4Y(s) - as^2 - b \quad \text{(0,3 pts)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - a \quad \text{(0,2 pts)}$$

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{(0,1 pts)}$$

Reemplazando:

$$s^4Y(s) - as^2 - b - s^2Y(s) + a = \frac{1}{s} \quad \text{<- 0,1 pts}$$

$$Y(s)\left(s^4 - s^2\right) = \frac{1}{s} + a(s^2-1) + b \quad \text{<- 0.2 pts}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)\cdot s^2(s^2-1) = \frac{1}{s} + a(s^2-1) + b \quad \text{<- 0.2 pts}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{1}{s^3(s^2-1)} + \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s^2(s^2-1)}} \quad \text{<- 0.1 pts}$$

Nota: Cualquier forma que utilice transformada de Laplace para llegar al resultado correcto es aceptada, y se debe asignar todo el puntaje. Cualquier resultado algebraicamente equivalente también es aceptado y se debe asignar todo el puntaje.

(d) (1 pt) A partir de lo anterior, calcule por antitransformada la deformación $y(x)$ en función de a y de b.

Solución

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)} + \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s^2(s^2-1)}\right\} \quad \text{(0,1 pts)}$$

Si no se explicita la expresión anterior y sólo se explicita la expresión siguiente, asignar 0,2 pts a la siguiente.

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)}\right\} + a\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + b\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} \quad \text{(0,1 pts)}$$

$$\text{de la tabla:} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x \quad \text{(0,2 pts)}$$

$$\text{de (a):} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \sinh(x) - x \quad \text{(0,2 pts)}$$

$$\text{de (b):} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)}\right\} = \cosh(x) - \frac{x^2+2}{2} \quad \text{(0,2 pts)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \cosh(x) - \frac{x^2+2}{2} + a \cdot x + b \cdot (\sinh(x) - x)} \quad \text{(0,2 pts)}$$

(e) (1 pt) Explique cómo calcular las constantes a y b y encuéntrelas explícitamente.

Solución

Para calcular las constantes a y b se usan las condiciones de borde en $x = 1$:

$$y(1) = 0 \quad \wedge \quad y''(1) = 0 \quad \text{(0,2 pts)}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= \cosh(1) - \frac{1+2}{2} + a + b(\sinh(1) - 1) \\ &= \cosh(1) - \frac{3}{2} + a + b(\sinh(1) - 1) = 0 \quad \text{(0,2 pts)} \end{aligned}$$

Necesitamos $y''(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\cosh(x) - \frac{x^2+2}{2} + ax + b(\sinh(x) - x)\right) \\ &= \sinh(x) - x + a + b(\cosh(x) - 1) \\ \Rightarrow y''(x) &= \cosh(x) - 1 + b\sinh(x) \quad \text{(0,2 pts)} \end{aligned}$$

Aplicando la condición de borde:

$$y''(1) = \cosh(1) - 1 + b\sinh(1) = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1-\cosh(1)}{\sinh(1)}} \quad \text{(0,2 pts)}$$

Reemplazando en $y(1) = 0$:

$$a = \frac{3}{2} - \cosh(1) - b(\sinh(1) - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2} - \cosh(1) - \frac{1-\cosh(1)}{\sinh(1)} \cdot (\sinh(1) - 1)} \quad \text{(0,2 pts)}$$

Nota: No es necesario expresar el resultado en función de cosh y sinh, ya que para la evaluación de las condiciones de borde, el/la estudiante las podría haber expandido usando la función exponencial (según la indicación en el enunciado).