Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2025-1

Control 3

P1. Considere la función $F\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(x)\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

a) **(2,5 pts.)** Justifique que F es derivable y muestre que

$$x\big(\ln(x)\big)^2 F'(x) = x - \ln(x)F(x).$$

b) **(0,5 pts.)** Calcule $F'(2)$.

c) **(2,5 pts.)** Justifique que F' es derivable y muestre que

$$x^2\big(\ln(x)\big)^3 F''(x) = \ln(x)(2+\ln(x))F(x) - 3x.$$

d) **(0,5 pts.)** Calcule $F''(2)$.

P2. a) **(3,0 pts.)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$ delimitada por las curvas $x = y^2 - y - 6$, $x = 2y + 4$ y $x = 4y$ (vea la Figura 1).

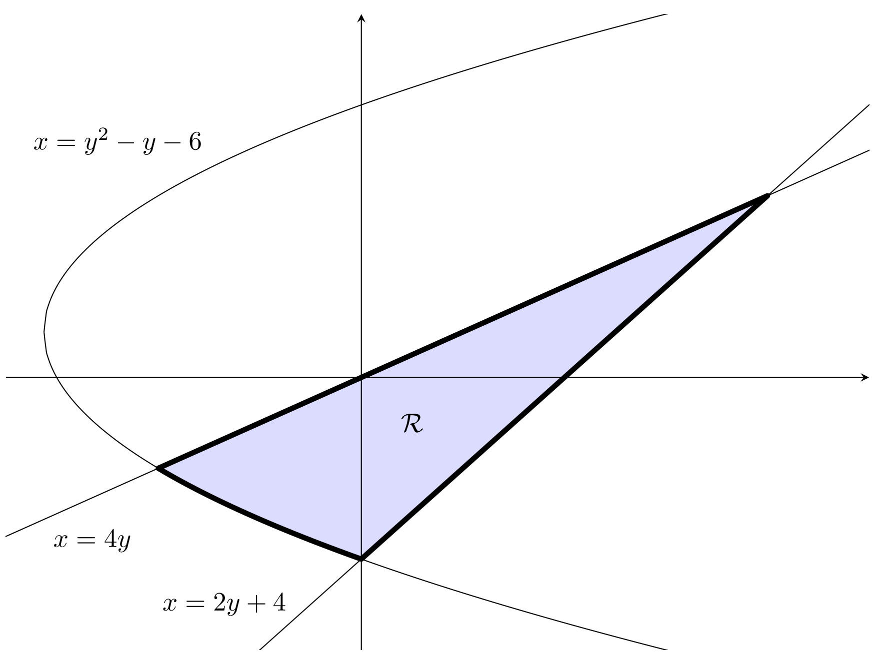

Figura 1: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule la longitud de la curva que define f.

P3. a) **(3,0 pts.)** Analice la convergencia de la integral

$$\int_{1^+}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-1)^{5/7}}\,\mathrm{d}x.$$

b) **(3,0 pts.)** Analice la convergencia de la integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2+\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Formulario	Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$
	Volumen de un sólido de área transversal A ($A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)	$\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \geq 0$)	$2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$
	Longitud del arco de curva definido por f ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)	$\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$
	Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)	$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$
	Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b-a \leq 2\pi$)	$\frac{1}{2}\int_a^b \big(f(\phi)\big)^2\,\mathrm{d}\phi$

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.