TAREA NUMÉRICA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 2021

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JESSICA TRESPALACIOS Y NICOLÁS VALENZUELA
V. 1.0 SEPTIEMBRE 13, 2021

Indicaciones importantes:

1. Lea cuidadosamente cada párrafo del enunciado antes de intentar resolverlo.
2. Escriba un **código en Python** para modelar el problema que abajo se plantea.
3. **Es necesario adjuntar** a su tarea el código que ha utilizado para realizarla; este código bien ejecutado pondera 50 % de la misma.
4. Se le pide además un **informe en pdf**, que cuenta el 50 % restante, describiendo y respondiendo en detalle todas las preguntas abajo mencionadas: si es posible, grafique y represente esquemáticamente sus resultados; explique con palabras cada vez que pueda los procedimientos que ha seguido. De valor agregado a su trabajo.
5. Esta tarea es obligatoria: se necesita en ella **1.1 o mayor para aprobar el curso**.
6. Esta tarea corresponde **al Control 3**.
7. Cada código e informe debe ser **escrito personalmente** y de acuerdo a su punto de vista del problema, copias y/o tareas a encargo **serán calificadas 1.0 global**. Ver punto 5 arriba.
8. La fecha de entrega de esta tarea es el **Viernes 19 de noviembre, hasta las 23:59**. Se descontará un punto por cada día de atraso.
9. Se recomiendo empezar programando la tarea desde ya, avanzando lenta pero progresivamente.
10. La fecha de entrega de las notas será el **Lunes 6 de diciembre**, aproximadamente.

Expansión del Universo e Inflación. En Cosmología, desde 1998 se sabe que el Universo se expande, y lo hace *cada vez más rápido*.

Para modelar la expansión del Universo se usa una función del tiempo llamada *parámetro de escala*, denotado $a(t) > 0$. Mientras más rápido crece $a(t)$, el Universo se expande más rápido, como el interior de un globo inflándose. El tiempo t se mide en años, donde $t = 0$ representa un punto fijo particular. También se asume $a(0) = 1$.

El principio básico que se usa en Cosmología para derivar ecuaciones sobre $a(t)$ es que el Universo a gran escala es *homogéneo e isótropo*, es decir todos los puntos del espacio sufren la misma expansión (en promedio) y ningún punto es particularmente especial, a grandes escalas.

Asumiendo este principio, las **ecuaciones de la Relatividad General de Einstein** permiten describir la evolución de $a(t)$. Usando estas ecuaciones, Friedmann (1922) encontró que $a(t)$ debe satisfacer las relaciones

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} H^2(t) = \dfrac{8\pi}{3}\rho(t) - \dfrac{\kappa}{a^2(t)}, \quad H(t) := \dfrac{a'(t)}{a(t)}, \\ \dfrac{a''(t)}{a(t)} = -\dfrac{4\pi}{3}\left(\rho(t) + 3p(t)\right). \end{cases}$$

La función $H(t)$ se denomina **parámetro de Hubble**, y mide la tasa de expansión del universo. Aquí, κ mide la curvatura del Universo (cuánto está curvado), donde sólo puede tomar los valores $\kappa = 0, 1, -1$.

Finalmente, $\rho(t)$ y $p(t)$ representan la *densidad de energía* (materia normal, materia oscura y energía oscura) y la *presión* (normalizada) presente en el Universo, en tiempo t, respectivamente (algo que se expande, *presiona cada vez menos su interior*).

Parte 1. Marco Teórico.

(a) Usando las ecuaciones en (F), muestre que

$$H'(t) = -4\pi\left(\rho(t) + p(t)\right) + \frac{\kappa}{a^2(t)},$$

y

$$\text{(P)} \qquad \rho'(t) = -3H(t)\left(\rho(t) + p(t)\right).$$

(b) Si ahora asumimos que el Universo es un **fluido perfecto**, entonces la presión viene dada por la relación (asúmalo en esta parte)

$$\text{(PR)} \qquad p(t) = \omega\rho(t),$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ es constante. Muestre que en este caso

$$\rho(t) = \rho(0)a^{-3(1+\omega)}(t), \quad \text{si} \quad \omega \neq -1,$$
$$\rho(t) = \rho(0), \quad \text{si} \quad \omega = -1.$$

(c) Suponga ahora que el Universo es *plano*, es decir $\kappa = 0$ (esto es lo que actualmente se encuentra). Usando (F) y la parte anterior, pruebe que

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}(1+\omega)\ell_0 t + 1\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad \omega \neq -1, \quad \ell_0 := \sqrt{\frac{8\pi\rho(0)}{3}},$$

y

$$a(t) = e^{\ell_0 t}, \quad \omega = -1.$$

Indicación: asuma que el Universo se expande y acelera siempre, es decir $a'(t) > 0$ (es lo que se mide a día de hoy).

(d) Un Universo sin presión ($\omega = 0$) se dice *dominado por la materia*, mientras que uno con presión $\omega = -1$ se dice *dominado por la constante cosmológica*. Compare $a(t)$ en ambos casos y justifique por qué la constante cosmológica tiende a acelerar la expansión del Universo, mientras la materia la desacelera.

Observación: A día de hoy (2018), se sabe por mediciones que $\omega \sim -1{,}028$.

Parte 2. Inflación. Uno de los problemas que posee el modelo anterior es que es difícil de explicar científicamente por qué en la práctica $\omega \sim -1$. Esto se llama el **problema del aplanamiento** del Universo. Para ello, se introduce una función $\phi = \phi(t)$ (denominada **inflatón**) cuyo objetivo sería, a través del Big-Bang, explicar por qué se llega a un universo plano.

Para ello, la presión y la densidad siguen la forma

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\phi'^2(t) + V(\phi(t)), \quad p(t) = \frac{1}{2}\phi'^2(t) - V(\phi(t)),$$

donde $V(s) \geq 0$ es el llamado potencial de inflatón (hasta el día de hoy desconocido), que asumiremos de clase $C^1(\mathbb{R})$. Para esta elección, bajo qué condiciones se cumple además (PR)?

(f) Muestre que se satisfacen las EDOs

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \frac{a''(t)}{a(t)} = -\frac{8\pi}{3}\left(\phi'^2(t) - V(\phi(t))\right), \\ \phi''(t) + 3H(t)\phi'(t) + V'(\phi(t)) = 0. \end{cases}$$

Note que este es un sistema no lineal de ecuaciones de segundo orden en $(a(t), \phi(t))$, por lo que se necesitan dos condiciones iniciales para cada función.

Hasta el día de hoy, el candidato más cercano a cumplir el rol de potencial de inflatón es un potencial llamado "R^2", dado por

$$\text{(V)} \qquad V(s) = \frac{1}{4}(1 - e^{-s})^2.$$

Grafique V. A partir de ahora, usaremos este potencial como dato.

Implementación de Runge-Kutta 4 y ejemplos relevantes.

(g) Dados datos iniciales $(a_0, a_1, \phi_0, \phi_1)$ y $T > 0$ fijo, implemente en Python el algoritmo RK4 para el problema (I) para $(a(t), \phi(t))$, con condiciones iniciales $(a(0), a'(0), \phi(0), \phi'(0)) = (a_0, a_1, \phi_0, \phi_1)$, en el intervalo $t \in [0, T]$. Tome como paso $h = 0{,}01$. Grafique $(\ln a(t), \phi(t))$ para los valores $(a_0, a_1, \phi_0, \phi_1) = (1, 0, 1, 0)$ y $(a_0, a_1, \phi_0, \phi_1) = (1, 0, 3, 0)$ y $T = 200$. Explique en detalle lo que ve. Busque en internet los términos *slow-roll* y *oscillon* para explicar sus resultados.

(h) Los datos observacionales obtenidos por la colaboración Planck nos muestran que $\ln a$ al final del proceso inflacionario es del orden de 45 (es decir, grosso modo el Universo se expandió e^{45} veces en el tiempo del proceso inflacionario). Modifique el valor de ϕ_0 en $(a_0, a_1, \phi_0, \phi_1) = (1, 0, 1, 0)$ apropiadamente para producir el valor $\ln a \sim 45$ a partir de un cierto tiempo, donde se entra en un proceso oscilatorio en $\phi(t)$ y plano en $\ln a(t)$. Grafique sus resultados y describa en detalle lo que ve.