

## Tarea Numérica MA2601 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2021-1

Profs. Alvaro Bustos, Alexander Frank, Alexis Fuentes, Alvaro Hernández,  
Christofer Maulén, Axel Osses, Donato Vásquez

### *Modelo simple de formación de estrellas*

**Fecha de publicación:** jueves 6 de mayo 2021

**Entrega:** miércoles 2 de junio 2021, 18:00

**Recursos computacionales:** python 3.0 o superior

**Planteamiento:** En un modelo simple de formación y evolución de estrellas, el gas atómico se convierte en gas molecular que a su vez se convierte en estrellas. Luego las estrellas al desintegrarse vuelven a formar gas atómico. Si  $a$  es la fracción de masa de gas atómico,  $m$  la fracción de masa de gas molecular y  $s$  la fracción de masa de estrellas activas, entonces:

$$a + m + s = 1 \quad (1)$$

donde 1 es la masa total considerada, y para ciertas constantes  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  y  $\alpha \geq 1$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= s - k_1 m^2 a \\ \frac{dm}{dt} &= k_1 m^2 a - k_2 m^\alpha s \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $t$  se mide en millones de años. Considere las siguientes combinaciones de parámetros:

$k_1$	$k_2$	$\alpha$	$a(0)$	$m(0)$
10	10	1.0	0.15	0.15
8	15	1.2	0.4	0.3
8	15	1.5	0.4	0.3
8	15	1.9	0.4	0.3
8	15	2.0	0.4	0.3
8	15	2.1	0.4	0.3

Considere un intervalo de  $[0, T]$  con  $T = 100$  (millones de años) y un paso de tiempo de  $\Delta t = 0,1$ .

- (1 pts) Resuelva numéricamente el sistema usando el método de Euler progresivo para obtener la evolución de la masa de estrellas  $s$  para una fracción inicial de gas atómico y molecular de  $a(0)$  y  $m(0)$  en los distintos casos de la tabla. Grafique superpuestas las tres curvas de  $a$ ,  $m$  y  $s$  en cada caso etiquetando las curvas. Si en alguno de los casos el método de Euler diverge, esto es, si obtiene valores muy grandes fuera del rango  $[0, 1]$ , disminuya el paso de tiempo hasta obtener convergencia y repórtelo.
- (1 pts) Grafique en un plano  $(a(t), m(t))$  las trayectorias en función del tiempo (este plano es llamado *plano de fases*). ¿Qué tipo de comportamiento observa en cada caso? Para describirlo averigüe y registre en su informe qué significa evolución hacia un estado estacionario y evolución hacia un ciclo límite.

- (c) (1.5 ptos) Los siguientes ejercicios serán con los datos del segundo caso de la tabla pero haciendo variar  $1,3 \leq \alpha \leq 1,9$ . Suponiendo que la evolución del sistema tiende a un cierto equilibrio periódico. ¿Con qué frecuencia se reproducen las estrellas? Piense y programe algún algoritmo para estimar el periodo límite. Grafique este periodo límite en función de  $\alpha$ . ¿Es una función creciente o decreciente?
- (d) (1.5 ptos) Resuelva el mismo problema (c), pero esta vez usando Runge-Kutta de orden 4 (debe programar el método primero usted mismo). ¿Se reproducen con la misma frecuencia las estrellas? Compare con lo que obtuvo en la parte (c) para un mismo paso de tiempo.
- (e) (1 pto) Resuelva el mismo problema (c) pero esta vez usando alguna rutina de resolución de EDO de alguna librería de python de su elección. Investigue cuáles son las rutinas existentes más usadas. Averigüe qué método usa la rutina utilizada, explíquelo y regístrelo en su informe. Compare con los resultados obtenidos en (c) y (d) graficando los tres resultados en un solo gráfico y etiquetando las curvas.

### Reglas:

1. La tarea es individual.
2. No está permitido utilizar métodos previamente programados excepto que así se indique explícitamente. El único lenguaje aceptado será **python** versión 3.0 o superior.
3. Se debe enviar un **informe** con la solución de la Tarea. El informe debe estar en **pdf** (obtenido por LaTeX, word o manuscrito escaneado) en un archivo simple que incluya el **nombre y apellido** del alumno. Consiste en un resumen breve con una explicación de los métodos implementados y los resultados obtenidos. Se debe incluir el nombre del alumno y profesor en su primera página y debería tener en lo posible una estructura formal de: introducción/motivación, resultados, conclusiones, bibliografía. Ver rúbrica más adelante.
4. Los **programas se deben adjuntar** junto con el informe, compactados en un archivo simple. Los programas deben estar debidamente **documentados y legibles**. Los nombres de las variables deben facilitar la comprensión del algoritmo, deben intercalarse comentarios explicativos y debe quedar claro con qué parámetros se evalúan las funciones programadas. Ver rúbrica más adelante.
5. Debe existir un ejecutable por cada parte de la Tarea. Los gráficos deben ser claramente legibles e interpretables con título, nombres de ejes, leyendas si es necesario.
6. Las dudas deben canalizar a través del Foro de Tareas que sea implementado para este efecto.

Tópico/ámbito	Lenguaje y organización			Presentación y coherencia			Resultados		
	3	2	1	3	2	1	3	2	1
Programas	Código legible y con suficientes comentarios explicativos.	Pocos comentarios.	Insuficientes comentarios	Buena elección de las variables y sus nombres. Buena organización del código que facilita la comprensión.	Mediana comprensión del código.	VARIABLES y/o código confusos.	Ejecutables para cada ítem con parámetros claros.	Ejecutables no separados o sin parámetros claros.	Nada de lo anterior.
Gráficos	Lenguaje en gráficos y/o tablas rico en explicaciones y correcto.	Lenguaje pobre.	Lenguaje incorrecto.	Líneas visibles y distinguibles. Título y nombre de las variables en los ejes. Etiquetado de curvas. Figuras y/o tablas con subtítulos (captions) explicativos.	Faltan más de 2 aspectos	Faltan más de 3 aspectos	Gráficos auto-explicativos que muestran correctamente los resultados de la simulación.	Faltan curvas o resultados en el gráfico/tabla o no se entiende qué representan.	No existe el gráfico o tabla correspondiente.
Informe	Lenguaje adecuado en general y uso de conceptos.	Lenguaje pobre y/o falta de conceptos.	Lenguaje incorrecto y falta de conceptos.	Estructura ordenada sugerida: introducción/motivación, resultados, conclusiones, bibliografía.	Faltan a lo más 2 secciones de la estructura propuesta.	Faltan más de 2 aspectos.	Buena organización de los resultados e integración de los gráficos/tablas al texto. Comentarios conclusivos. Logro de los objetivos.	Organización insuficiente o falta de conclusiones. Objetivos medianamente logrados.	Faltan más aspectos y ningún objetivo logrado.

Cuadro 1: Rúbrica para guiar la corrección en cada ítem: 3 máximo pje, 2 pje medio, 1 pje mínimo.