UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2021
MA2601, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES COORDINADAS

TAREA 1.

P1.-

Parte A

Considere la ecuación diferencial

$$y^2(x^2+y^3)y' - x = 0. \tag{1}$$

1. (1 punto) Utilizando sustitución $z = x^2 + y^3$ en (1), demuestre que se obtiene la siguiente EDO en la variable z

$$z' = \left(\frac{3}{z} + 2\right) x \tag{2}$$

2. (1 punto) Probar que $x \mapsto z(x) = -3/2$ con $x \in \mathbb{R}$ es solución constante de (2) y que la correspondiente solución para (1) está dada por $y_1(x) = -\sqrt[3]{3/2 + x^2}$ con x real Verifique esto último (no olvide comprobar que efectivamente y_1 es solución de (1))
3. (1 punto) Separando variables resolver la EDO (2) y obtenga una expresión para la correspondiente solución general de (1). ¿Se puede recuperar y_1 de la parte anterior a partir de esta solución general? Comente.

Parte B

Considere la siguiente EDO en la variable y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} f(ty), \quad t \neq 0. \tag{3}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

1. (1 punto) Estudie la EDO el caso en que la función f es la función constante -1.
2. (1 punto) Ahora considere el caso $f(u)$ genérica y utilice el cambio $u = ty$ y verifique que este transforma (3) en $u't = u(1 + f(u))$. Finalmente entregue una expresión que conduce a la solución general en u, en términos de una integral.
3. (1 punto) Aplicar la parte anterior para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(ty+1)}{-t(1+ty+t^2y^2)} \quad t \neq 0. \tag{4}$$

P2.-

Parte A

(3 puntos) Hallar la familia de curvas que satisfacen las siguientes propiedades:

- El gráfico están en el primer cuadrante.
- Son de clase C^1 es decir son derivables con derivada continua.
- Cualquier punto P en la curva es el punto medio del segmento de recta que une los puntos de intersección de la recta tangente a la curva en P con los ejes coordenados.

Ind: Recordar que la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función derivable $x \mapsto y(x)$ en el punto $P = (x_0, y(x_0))$, está dada por $y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$.
Obs: Se entiende por segmento como un trazo de longitud estrictamente positiva.

Parte B

(3 puntos) Suponga que la dinámica de población de una cierta especie obedece a la siguiente ley logística

$$p' = ap - bp^2, \tag{5}$$

donde $p = p(t)$ es la cantidad de individuos de la especie en el instante t y p' indica la derivada de p con respecto al tiempo. En el instante en que la cantidad de individuos es Q, con $Q < a/b$ la población comienza a verse afectada por las condiciones climatológicas de la región, de esta forma su población comienza a disminuir según el régimen del siguiente modelo:

$$p' = Ap - Bp^2. \tag{6}$$

donde supondremos que los nuevos valores de A y B satisfacen $Q > A/B$ $(A < a,\ B < b)$. La población comienza a recuperarse una vez que se alcanza la cantidad de q individuos, donde $q > A/B$, $q < Q$. En ese punto, la población vuelve a regirse por el modelo (5), hasta que en el futuro vuelve a verse afectada nuevamente por el cambio climático, generando una fluctuación de la cantidad de habitantes periódica en el tiempo. Si denotamos por T al período del ciclo, es decir al tiempo transcurrido entre que la población alcanza el valor Q luego vuelve a alcanzar dicho valor (o equivalentemente, alcanza el valor q y luego vuelve a tomar el valor q) muestre que

$$T = \frac{1}{a} \ln\left[\frac{Q}{q}\left(\frac{a - bq}{a - Qb}\right)\right] + \frac{1}{A} \ln\left[\frac{q}{Q}\left(\frac{A - BQ}{A - qB}\right)\right]$$

Verificar además que $T > 0$ según los datos del problema.

P3.-

Parte A

Para $x > 0$ considere la ecuación de Ricatti

$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y = -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3) \tag{7}$$

1. (1.5 puntos) Considere $y_p(x) = e^{2x}(ax+b)$, determinar a, b para que esta sea solución particular de (7).
2. (1.5 puntos) Calcular la solución general de la ecuación (7).

Parte B

Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas de período T, es decir $a(x+T) = a(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, lo mismo para b. Considere la EDO lineal de primer orden

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{8}$$

1. (2 puntos) Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solución de (8). Demostrar que u es T períodica si y sólo si $u(0) = u(T)$.
   Ind: Para el implica $\Leftarrow$, defina la función $\varphi(x) = u(x+T) - u(x)$ determinando la EDO que satisface y luego aplicar adecuadamente TEU para concluir.
2. (1 punto) En el caso homogéneo en (8), esto es $b(x) = 0$ en todo $\mathbb{R}$, usar la parte anterior para encontrar una condición que asegure que dicha EDO tenga soluciones T períodicas.