Pauta Tarea Numérica.

$$(F)\left\{\begin{array}{l} H^2(t) = \dfrac{8\pi}{3}\rho(t) - \dfrac{k}{a^2(t)} \ (i), \quad H(t) := \dfrac{a'(t)}{a(t)} \ (ii) \\[2ex] \dfrac{a''(t)}{a(t)} = -\dfrac{4\pi}{3}\left(\rho(t) + 3p(t)\right). \ (iii). \end{array}\right.$$

(a) Usando (F), muestre que.

1) $H'(t) = -4\pi\left(\rho(t) + p(t)\right) + \dfrac{k}{a^2(t)}.$

(P) $\rho'(t) = -3H(t)\left(\rho(t) + p(t)\right).$

Demostración:

Para demostrar 1) derivemos ii).

$$H'(t) = \left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)' \overset{\text{regla del producto}}{=} \frac{a''(t)}{a(t)} - \underbrace{\frac{a'(t)}{a(t)^2} \cdot a'(t)}_{H^2(t)}.$$

~~Usando i) y iii)~~

Se pueden utilizar los puntos i) y iii) para obtener.

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\frac{4\pi}{3}\left(\rho(t) + 3p(t)\right) - \left(\frac{8\pi}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}\right) \\ &= -\frac{12}{3}\pi\rho(t) - 4\pi p(t) + \frac{k}{a^2(t)}. \\ &= -4\pi\left(\rho(t) + p(t)\right) + \frac{k}{a^2(t)}. \end{aligned}$$

Lo que demuestra el punto 1).

Para demostrar (P), derivamos ~~Ec~~. i).

$$2H(t)H'(t) = \frac{8\pi}{3}\rho'(t) + \frac{2K}{a^3(t)}a'(t).$$

Usando ii) y lo demostrado en 1) para obtener.

$$\frac{8\pi}{3}\rho'(t) = 2H(t)\left(H'(t) - \frac{K}{a^2(t)}\right)$$

$$= 2H(t)\left(-4\pi(\rho(t)+P(t)) + \cancel{\frac{K}{a^2(t)}} - \cancel{\frac{K}{a^2(t)}}\right)$$

$$= -8\pi H(t)(\rho(t)+P(t)).$$

$$\Rightarrow \rho'(t) = -3H(t)(\rho(t)+P(t)).$$

Lo que demuestra (P).

(b) (PR) $P(t) = w\rho(t)$. $w \in \mathbb{R}$ constante.

pdq $\rho(t) = \rho(0)a^{-3(w+1)}(t)$ si $w \neq -1$.

$\rho(t) = \rho(0)$ si $w = -1$.

Demostración:

- Si $w = -1 \Rightarrow P(t) = -\rho(t)$.

Usando (P) de la parte anterior se tiene que.

$$\rho'(t) = -3H(t)(\rho(t) \cancel{+} - \rho(t)) = 0.$$

$\Rightarrow \rho(t) = cte = \rho(0) \quad \forall t \geq 0.$

- Si $\omega \neq -1 \Rightarrow p(t) = \omega \rho(t)$.

Usando (P) se obtiene.

$$\rho'(t) = -3H(t)(\rho(t) + \omega \rho(t)).$$
$$= -3H(t)\rho(t)(1+\omega).$$

Dividiendo por $\rho(t)$, y utilizando que $\ln(y(t))' = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$

por regla de la cadena.

se tiene que

$$\ln(\rho(t))' = -3\ln(a(t))'(1+\omega).$$

Recordemos propiedades del logaritmo: $b\ln(a) = \ln(a^b)$

y $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ con $b \neq 0$.

Integrando entre 0 y t lo obtenido se tiene.

$$\ln(\rho(t))' = \ln(a^{-3(1+\omega)}(t))' \quad \Big/ \int_0^t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\rho(t)}{\rho(0)}\right) = \ln\left(\frac{a^{-3(1+\omega)}(t)}{a^{-3(1+\omega)}(0)}\right).$$

Usando que $a(0)=1$, tomando exponencial y multiplicando por $\rho(0)$ se obtiene.

$$\rho(t) = \rho(0)\, a^{-3(1+\omega)}(t).$$

Demostrando así la parte (b).

(c) Suponga $k=0$. Usando (F) y parte (b) demuestre que.

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}(1+w)l_0 t + 1\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad w \neq -1$$

$$a(t) = e^{l_0 t}, \quad w = -1$$

con $l_0 := \sqrt{\frac{8\pi}{3}\rho(0)}$.

Demostración:

- Si $w=-1$, por parte (b) $\rho(t)=\rho(0)$.

Como $k=0$, entonces $H^2(t) = \frac{8\pi}{3}\rho(t)$

$$\Rightarrow H(t) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\rho(0)} = l_0.$$

Recordando que $H(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \ln(a(t))'$ e integrando entre 0 y t se obtiene.

$$\ln(a(t)) = l_0 t.$$

$$\Rightarrow a(t) = e^{l_0 t}.$$

- Si $w \neq -1$, por parte (b) $\rho(t) = \rho(0)a^{-3(1+w)}(t)$.

Usando i) con $k=0$ se tiene que

$$H(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{8\pi\rho(0)}{3}}}_{l_0} a^{-\frac{3}{2}(1+w)}(t).$$

multiplicando ambos lados por $a^{\frac{3}{2}(1+w)}(t)$ y usando (ii) se obtiene

$$a'(t)\, a^{\frac{3}{2}(1+w)-1} = l_0.$$

Usando ahora que $\frac{2}{3(1+w)}\left(a^{\frac{3}{2}(1+w)}(t)\right)' = a^{\frac{3}{2}(1+w)-1}(t)\cdot a'(t)$.

e integrando entre 0 y t se obtiene.

$$\frac{2}{3(1+w)}\left(a^{\frac{3}{2}(1+w)}(t) - a^{\frac{3}{2}(1+w)}(0)\right) = l_0 t.$$

$$\Rightarrow a^{\frac{3}{2}(1+w)}(t) = \frac{3}{2}(1+w)\, l_0 t + 1. \quad / \ (\cdot)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$\Rightarrow a(t) = \left(\frac{3}{2}(1+w)\, l_0 t + 1\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Obteniendo así lo pedido en la parte (c).

Pauta Tarea numerica:

d) En un universo sin presión ($w=0$) se dice dominado por la materia, mientras que uno con presión $w=-1$ se dice dominado por la constante cosmológica. Compare $a(t)$ en ambos casos y justifique porqué la constante cosmológica tiende a acelerar su expresión del Universo, mientras la materia la desacelera.

Solución:

Para $w=0$ tenemos que:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}l_0 t + 1\right)^{2/3} \quad ; \quad l_0 = \sqrt{\frac{8\pi\rho(t_0)}{3}}$$

Aunque se está asumiendo que el Universo se expande y acelera, es decir $a'(t)>0$; si la única fuerza significativa que actúa es la gravedad que es atractiva, la velocidad debe disminuir, es decir, la aceleración es negativa, en efecto.

$$a'(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}l_0 t+1\right)^{-1/3} \cdot \frac{3}{2}l_0 = l_0\left(\frac{3}{2}l_0 t+1\right)^{-1/3}$$

$$a''(t) = -\frac{1}{3}l_0\left(\frac{3}{2}l_0 t+1\right)^{-4/3} \cdot \frac{3}{2}l_0 = -\frac{l_0^2}{2}\left(\frac{3}{2}l_0 t+1\right)^{-4/3} < 0$$

por lo tanto podemos decir que la expansión del Universo se desacelera.

Mientras que para $w=-1$. Se obtiene un resultado diferente: La función es creciente $(a'(t)>0)$ y convexa.

$\therefore$ "La expansión del Universo se está acelerando": en efecto:

$$a(t) = e^{b_0 t} \qquad \text{para } w=-1$$

$$a'(t) = b_0 e^{b_0 t}$$

$$a''(t) = b_0^2 e^{b_0 t} > 0$$

<u>Observación</u>: esto fue en su momento una tremenda sorpresa, de los 13787 millones de años de vida del universo, se cumplía lo expuesto en la primera parte ($a(t)$ creciente y cóncava) hasta hace algo más de 6 mil millones de años. A partir de ese instante las observaciones constatan que se sigue cumpliendo $a'(t)>0$ pero ahora $a''(t)>0$.

$\hookrightarrow \equiv$ "La expansión del Universo se está acelerando"

Un universo dominado por la const. cosmológica.

e) $\gg$ ¿bajo que consideración se cumple (PR)? Parte 2.

Aquí se está tomando:

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(\phi')^2(t) + V(\phi(t)).$$

$$P(t) = \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi(t)) \quad ; \quad V(s) \geq 0$$

y recordemos que queremos $\boxed{P(t) = \omega\rho(t)}$ (PR)

Reemplazando:

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) = \omega\frac{1}{2}(\phi')^2(t) + \omega V(\phi(t)). \quad ; \text{ agrupando}$$

$$\frac{(1-\omega)}{2}(\phi')^2 = (1+\omega)V(\phi(t))$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)(\phi')^2 = V(\phi(t)) \geq 0 \quad \text{hipótesis.}$$

$\therefore$ esto implica que debe ser $\frac{1-\omega}{1+\omega} \geq 0 \implies -1 < \omega \leq 1.$

(f) Veamos que se satisface las EDOs

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \dfrac{a''(t)}{a(t)} = -\dfrac{8\pi}{3}\left(\phi'^2(t) - V(\phi(t))\right) \\ \phi''(t) + 3H(t)\phi'(t) + V'(\phi(t)) = 0 \end{cases}$$

Solución (f):

De la parte anterior, recordamos que:

$$(F)\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2} \; ; \quad H = \frac{a'(t)}{a(t)} \\ \frac{a''}{a} = -\frac{4\pi}{3}\left(\rho(t) + 3p(t)\right) \end{cases}$$

Ahora tomamos $k=0$; $\rho = \frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi)$

$$p(t) = \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi).$$

Reemplazando:

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) + \frac{3}{2}(\phi')^2 - 3V(\phi)\right)$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left(2(\phi')^2 - 2V(\phi)\right) = -\frac{8\pi}{3}\left((\phi')^2 - V(\phi)\right)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{8\pi}{3}\left((\phi')^2(t) - V(\phi(t))\right) \checkmark$$

Por otra parte: $H^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi)\right)^{(*)}$; derivando

$$2H\cdot H' = \cancel{8\pi}$$

$$= 2H\Big(\overbrace{-4\pi\left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi)\right)}^{\text{Formula dada en la parte (a) para } H'}\Big)$$

$$= 2H\left(-4\pi(\phi')^2\right) = -8\cancel{\pi} H(\phi')^2 = -8\pi H(\phi')^2 \quad (*)(*)$$

~~Igualando~~.

Derivando el lado derecho de $(*)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi)\right)\right) = \frac{8\pi}{3}\left(\phi'\cdot\phi'' + \phi' V'(\phi)\right) \quad (*)(*)(*)$$

Igualando: $(*)(*)$ y $(*)(*)(*)$

$$-8\pi(\phi')^2 H = \frac{8\pi}{3}\phi'\left(\phi'' + V'(\phi)\right)$$

$$\frac{8\pi}{3}\phi'\phi'' + \frac{8\pi}{3}\phi' V'(\phi) + 8\pi(\phi')^2 H = 0$$

$$\phi'\left(\frac{8\pi}{3}\phi'' + \frac{8\pi}{3} V'(\phi) + 8\pi\phi' H\right) = 0$$

$$\therefore \quad \phi''(t) + V'(\phi) + 3H(t)\phi'(t) = 0 \quad \checkmark$$

Codigo_Tarea_Num

December 8, 2021

[1]:
```
########## Parte g ############

## Importar Librerías
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Definición del potencial de inflatón
def V(s):
  return (1-np.exp(-s))**2 / 4

# Se calcula su derivada y se define en la siguiente función
def dV(s):
  return  (1 - np.exp(-s)) * np.exp(-s) / 2

# Parte derecha primera ecuación
def f(a,da,,d):
  return - 8 * np.pi / 3 * (d**2 - V()) * a

# Parte derecha segunda ecuación
def g(a,da,,d):
  return -3 * da / a * d - dV()

# Implentación de Runge-Kutta de orden 4
# Recibe condiciones iniciales a=[a0,a1] con a(0) = a0 y a'(0) = a1
#  = [0,1] con (0) = 0 y '(0) = 1
# Recibe además un tiempo final T y un paso de tiempo h
def RK4(a,,T,h):
  N = int(T / h) #Número de elentos en el vector
  # Creación de vectores que representan a, a', , '.
  # Los vectores viven en [0,T] y contienen N+1 componentes
  veca = np.zeros(N+1)
  vecda = np.zeros(N+1)
  vec = np.zeros(N+1)
  vecd = np.zeros(N+1)
  # Condiciones Iniciales
  veca[0] = a[0]
```

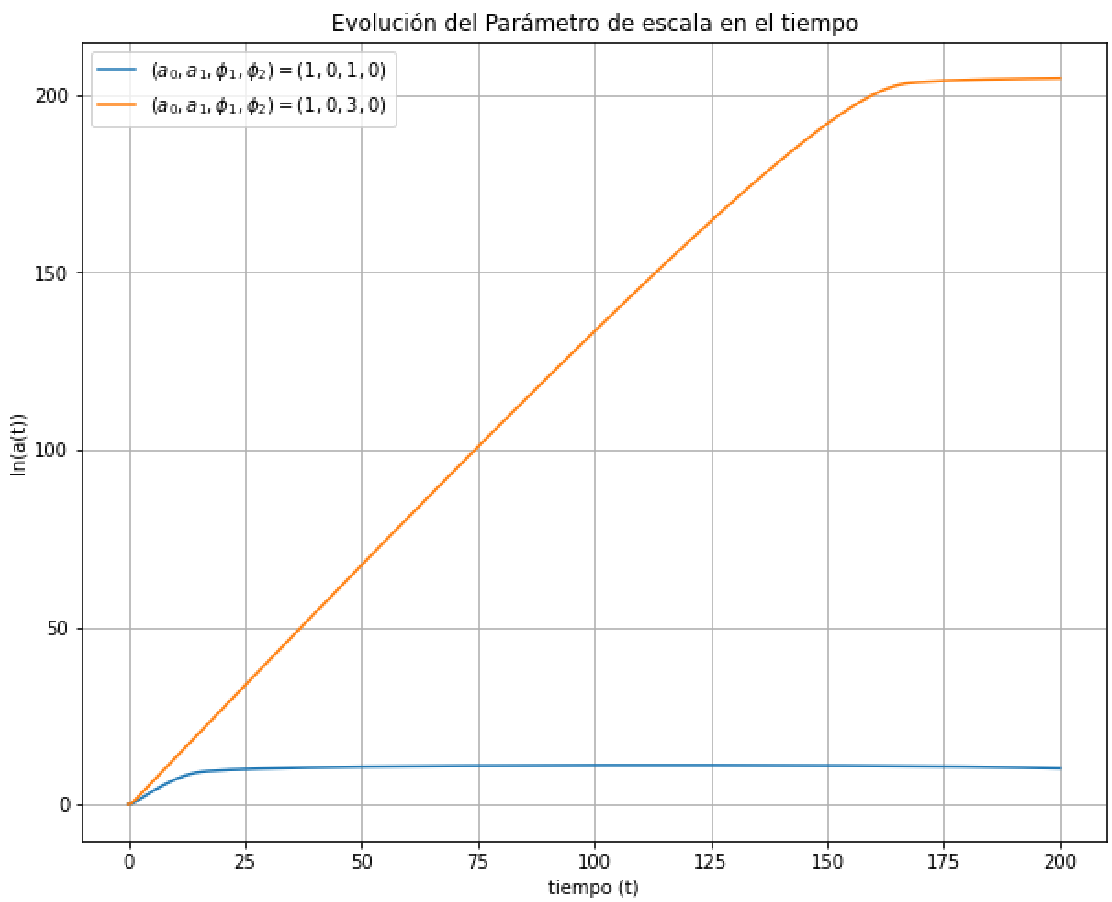
```
vecda[0] = a[1]
vec[0] = [0]
vecd[0] = [1]

for n in range(N):
  # Generación de k1 implicado en RK4, uno para cada variable
  k1a = vecda[n] # f(t,a,a',,') = a'
  k1da = f(veca[n],vecda[n],vec[n],vecd[n]) # f(t,a,a',,') = -8/3 ('~2-V())a
  k1 = vecd[n] # f(t,a,a',,') = '
  k1d = g(veca[n],vecda[n],vec[n],vecd[n]) # f(t,a,a',,') = -3 a'/a ' - V'()
  k1 = [k1a, k1da, k1, k1d]

  # Generación de k2 implicado en RK4, uno para cada variable
  # Notar que el lado derecho es de la forma f(t,a,a',,')
  # Entonces, al evaluar x_i + hk1/2 tiene que ser con el k1 correspondiente
  # a cada variable.
  k2a = vecda[n] + h * k1[1] / 2 # f(t,a,a',,') = a'
  k2da = f(veca[n]+h*k1[0]/2,vecda[n]+h*k1[1]/2,vec[n]+h*k1[2]/
↪2,vecd[n]+h*k1[3]/2) # f(t,a,a',,') = -8/3 ('~2-V())a
  k2 = vecd[n] + h * k1[3] / 2 # f(t,a,a',,') = '
  k2d = g(veca[n]+h*k1[0]/2,vecda[n]+h*k1[1]/2,vec[n]+h*k1[2]/
↪2,vecd[n]+h*k1[3]/2) # f(t,a,a',,') = -3 a'/a ' - V'()
  k2 = [k2a, k2da, k2, k2d]

  # Generación de k3 implicado en RK4, uno para cada variable
  # Notar que el lado derecho es de la forma f(t,a,a',,')
  # Entonces, al evaluar x_i + hk2/2 tiene que ser con el k2 correspondiente
  # a cada variable.
  k3a = vecda[n] + h * k2[1] / 2 # f(t,a,a',,') = a'
  k3da = f(veca[n]+h*k2[0]/2,vecda[n]+h*k2[1]/2,vec[n]+h*k2[2]/
↪2,vecd[n]+h*k2[3]/2) # f(t,a,a',,') = -8/3 ('~2-V())a
  k3 = vecd[n] + h * k2[3] / 2 # f(t,a,a',,') = '
  k3d = g(veca[n]+h*k2[0]/2,vecda[n]+h*k2[1]/2,vec[n]+h*k2[2]/
↪2,vecd[n]+h*k2[3]/2) # f(t,a,a',,') = -3 a'/a ' - V'()
  k3 = [k3a, k3da, k3, k3d]

  # Generación de k4 implicado en RK4, uno para cada variable
  # Notar que el lado derecho es de la forma f(t,a,a',,')
  # Entonces, al evaluar x_i + hk3 tiene que ser con el k3 correspondiente
  # a cada variable.
  k4a = vecda[n] + h * k3[1] # f(t,a,a',,') = a'
  k4da = f(veca[n]+h*k3[0],vecda[n]+h*k3[1],vec[n]+h*k3[2],vecd[n]+h*k3[3]) #␣
↪f(t,a,a',,') = -8/3 ('~2-V())a
  k4 = vecd[n] + h * k3[3] # f(t,a,a',,') = '
  k4d = g(veca[n]+h*k3[0],vecda[n]+h*k3[1],vec[n]+h*k3[2],vecd[n]+h*k3[3]) #␣
↪f(t,a,a',,') = -3 a'/a ' - V'()
```

```
    k4 = [k4a, k4da, k4, k4d]

    # Integrando RK4 para cada variable
    veca[n+1] = veca[n] + h/6 * (k1[0] + 2*k2[0] + 2*k3[0] + k4[0])
    vecda[n+1] = vecda[n] + h/6 * (k1[1] + 2*k2[1] + 2*k3[1] + k4[1])
    vec[n+1] = vec[n] + h/6 * (k1[2] + 2 * k2[2] + 2 * k3[2] + k4[2])
    vecd[n+1] = vecd[n] + h/6 * (k1[3] + k2[3] + k3[3] + k4[3])

  return veca,vec
```

[2]:
```
# Seteamos T = 200 y h = 0.01
T = 200
h = 0.01
N = int(T/h)
```

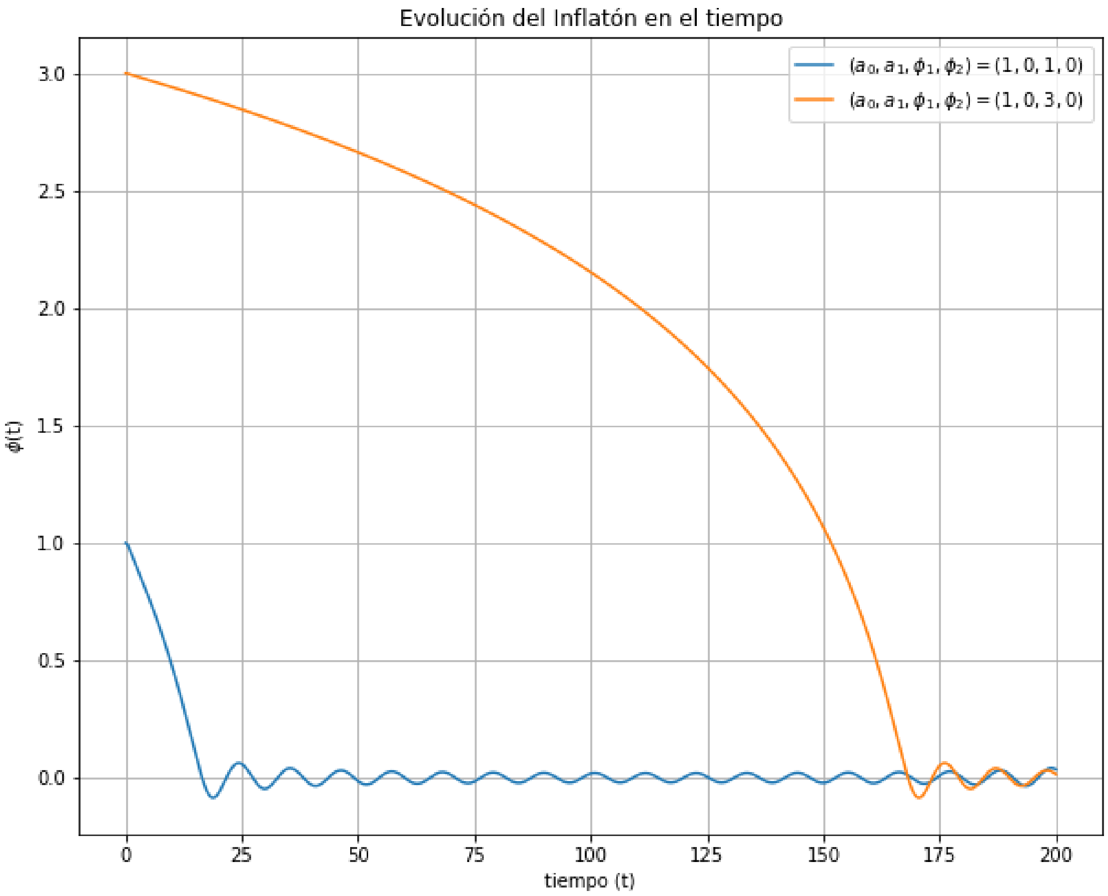
[3]:
```
# RK4 para (a0, a1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)
a1,1 =RK4([1,0],[1,0],T,h)
# RK4 para (a0, a1, 0, 1) = (1, 0, 3, 0)
a2,2 =RK4([1,0],[3,0],T,h)
```

[4]:
```
# Graficamos las soluciones aproximadas obtenidas
plt.figure(figsize=(10, 8)) # Seteamos el tamaño del gráfico
tvec = np.linspace(0,T,N+1) # Seteamos vector de tiempos
# Graficamos los vectores obtenidos
plt.plot(tvec, np.log(a1), label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,1,0)$')
plt.plot(tvec, np.log(a2), label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,3,0)$')
plt.title("Evolución del Parámetro de escala en el tiempo") # Seteamos título
plt.xlabel('tiempo (t)') # Seteamos nombre eje x
plt.ylabel('ln(a(t))') # Seteamos nombre eje y
plt.grid() # Cuadriculamos el gráfico
plt.legend() # Insertamos Leyenda
plt.show() # Mostramos el gráfico
```



[5]:

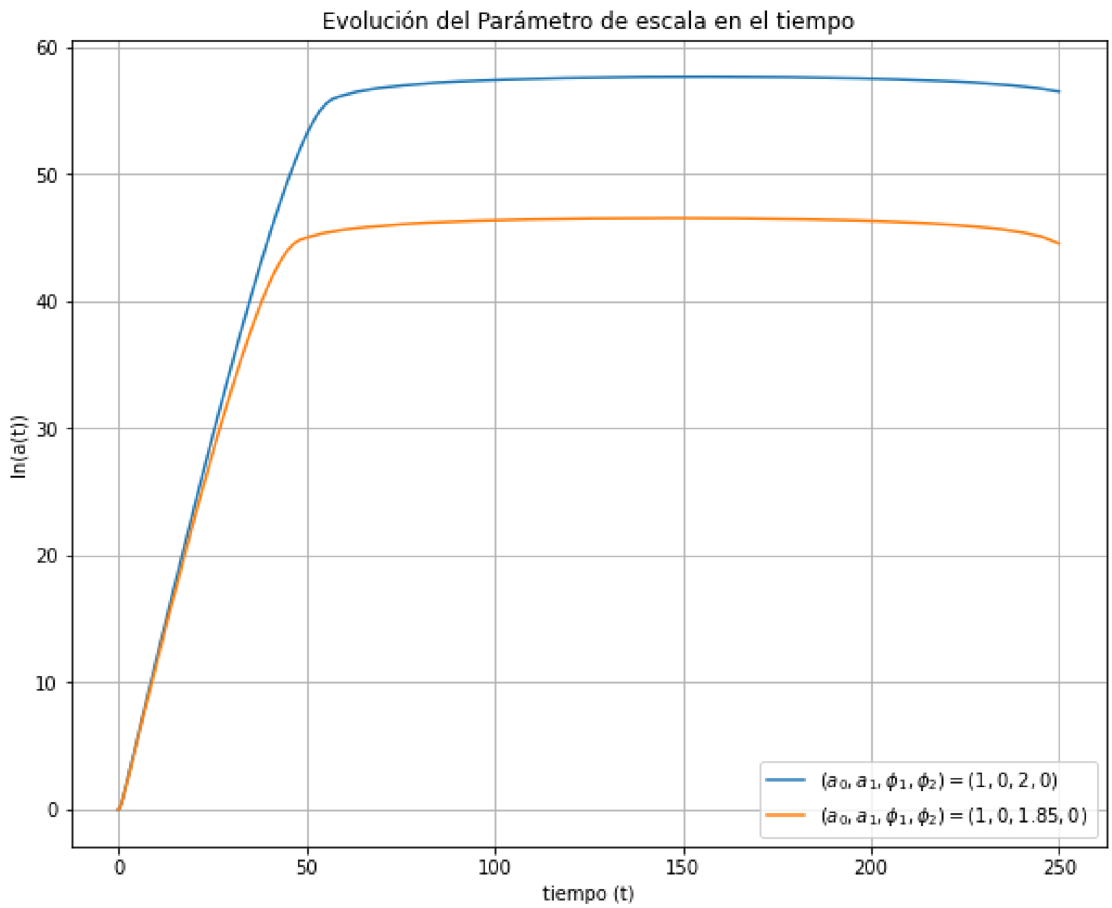
```
# Graficamos las soluciones aproximadas obtenidas
plt.figure(figsize=(16, 9)) # Seteamos el tamaño del gráfico
tvec = np.linspace(0,T,N+1) # Seteamos vector de tiempos
# Graficamos los vectores obtenidos
plt.plot(tvec, 1, label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,1,0)$')
plt.plot(tvec, 2, label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,3,0)$')
plt.title("Evolución del Inflatón en el tiempo") # Seteamos título
plt.xlabel('tiempo (t)') # Seteamos nombre eje x
plt.ylabel('$\phi$(t)') # Seteamos nombre eje y
plt.grid() # Cuadriculamos el gráfico
plt.legend() # Insertamos leyenda
plt.show() # Mostramos el gráfico
```



[6]:
```
######### Parte h ##########
T = 250
h = 0.01
N = int(T/h)

# Por los gráficos anteriores, 1 debe estar más cercano a 1 que a 3. probemos␣
 ↪con varios valores
# a3,3 =RK4([1,0],[1.5,0],T,h)
# print(np.log(a3))
a4,4 =RK4([1,0],[2,0],T,h)
print(np.log(a4))
a5,5 =RK4([1,0],[1.85,0],T,h)
print(np.log(a5))

# Graficamos las soluciones aproximadas obtenidas
plt.figure(figsize=(16, 9)) # Seteamos el tamaño del gráfico
tvec = np.linspace(0,T,N+1) # Seteamos vector de tiempos
# Graficamos los vectores obtenidos
# plt.plot(tvec, np.log(a3), label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,1.5,0)$')
```

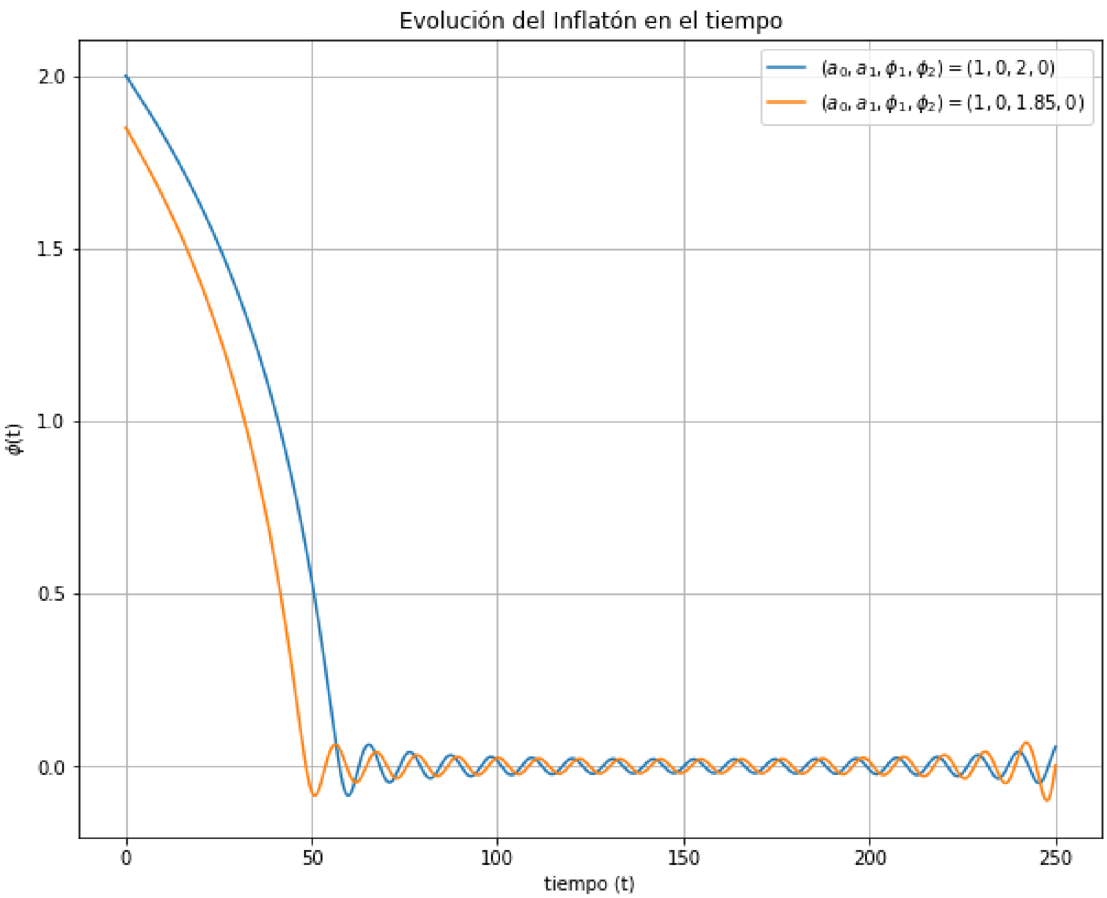
```python
plt.plot(tvec, np.log(a4), label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,2,0)$')
plt.plot(tvec, np.log(a5), label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,1.85,0)$')
plt.title("Evolución del Parámetro de escala en el tiempo") # Seteamos título
plt.xlabel('tiempo (t)') # Seteamos nombre eje x
plt.ylabel('ln(a(t))') # Seteamos nombre eje y
plt.grid() # Cuadriculamos el gráfico
plt.legend() # Insertamos Leyenda
plt.show() # Mostramos el gráfico
```

```
[0.00000000e+00 7.82911299e-05 3.13139703e-04 ... 5.65040820e+01
 5.65034362e+01 5.65027903e+01]
[0.00000000e+00 7.43752318e-05 2.97478416e-04 ... 4.45430595e+01
 4.45413476e+01 4.45396271e+01]
```



[7]:
```python
# Con 1 = 1.85 se tiene que ln(a(t)) ~ 45 a partir de T >= 50.
# Graficamos (t)

plt.figure(figsize=(16, 9)) # Seteamos el tamaño del gráfico
tvec = np.linspace(0,T,N+1) # Seteamos vector de tiempos
```

```
# Graficamos los vectores obtenidos
# plt.plot(tvec, 3, label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,1.5,0)$')
plt.plot(tvec, 4, label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,2,0)$')
plt.plot(tvec, 5, label = '$(a_0,a_1,\phi_1,\phi_2) = (1,0,1.85,0)$')
plt.title("Evolución del Inflatón en el tiempo") # Seteamos título
plt.xlabel('tiempo (t)') # Seteamos nombre eje x
plt.ylabel('$\phi$(t)') # Seteamos nombre eje y
plt.grid() # Cuadriculamos el gráfico
plt.legend() # Insertamos Leyenda
plt.show() # Mostramos el gráfico
```



[ ]:

[ ]:

[ ]:

[ ]:

[ ]: