MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 9

Se entregan la P1b, la P2c y la P3b.

P1. Cardinalidades.
¿Los siguiente pares de conjuntos tienen el mismo cardinal? En caso positivo, encuentre una biyección entre los dos conjuntos (y pruebe que la función propuesta es biyección).

a) Los intervalos $(0,1]$ y $[0,4)$ de $\mathbb{R}$.

b) Los intervalos $[0,1)$ y $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.
Solución:
Una posible solución se encuentra considerando el conjunto $A = \{x \in [0,1] : \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{n}\}$ *(es decir,* $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$*). Definimos* $f : [0,1) \to [0,1]$ *por* $f(x) = x$ *para cada* $x \in [0,1) \setminus A$*, encuánto para cada* $x = \frac{1}{n} \in A \setminus \{1\}$*, notamos que* $n \geq 2$*, y se define* $f(x) = \frac{1}{n-1}$*.*
Para probar que f *es una función biyectiva, es suficiente encontrar una función* $g : [0,1] \to [0,1)$ *tal que* $g \circ f = id_{[0,1)}$ *y* $f \circ g = id_{[0,1]}$*. Se propone la función* $g : [0,1] \to [0,1)$ *dada por* $g(x) = x$ *para todo* $x \in [0,1] \setminus A$ *y* $f(x) = \frac{1}{n+1}$ *para todo* $x = \frac{1}{n} \in A$*. Notando que* $(g \circ f)(x) = x$ *para todo* $x \in [0,1) \setminus A$ *y* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n} = x$ *para todo* $x = \frac{1}{n} \in A \setminus \{1\}$ *se tiene que* $g \circ f = id_{[0,1)}$*. De manera análoga se ve que* $f \circ g = id_{[0,1]}$*.*
(Es posible encontrar otras biyecciones, o probar la biyectividad de otra forma.)

c) Los conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

P2. Estructuras algebraicas.

a) Determine el neutro de $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \cap))$ y determine cuales de sus elementos tienen inversos y/o son cancelables.

b) Determine el neutro de $(\{V, F\}, \vee))$ y determine cuales de sus elementos tienen inversos y/o son cancelables.

c) Definimos la operación $*$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente forma: $(a,b) * (a',b') = (a \cdot a', b + b' + 1)$ para todo (a,b), $(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Determine el neutro de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ y determine cuales de sus elementos tienen inversos.
Solución:
El neutro de esta estructura es $(1,-1)$*. Para ver esto, se toma* $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *arbitrario y se calcula* $(1,-1) * (a,b) = (1 \cdot a, -1 + b + 1) = (a,b)$ *y* $(a,b) * (1,-1) = (a \cdot 1, b + (-1) + 1) = (a,b)$*.*
Notamos que (a,b) *tiene inverso* (a',b') *si y solamente si* $a \cdot a' = 1$ *y* $b + b' + 1 = -1$*, o equivalentemente,* $a = a' \in \{1,-1\}$ *y* $b' = -b - 2$*. Entonces los elementos que tienen inversos son los del tipo* $(1,b)$ *(que tienen inverso* $(1,-b-2)$*) y del tipo* $(-1,b)$ *(tienen inverso* $(-1,-b-2)$*), para todo* $b \in \mathbb{Z}$*.*

P3. Homomorfismos.

a) Muestre que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = -n$ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Muestre que las siguientes estructuras algebraicas son isomorfas:
- $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \triangle)$, donde $(x,x') \triangle (y,y') = (x+y, x')$, y
- $(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}, *)$, donde $2\mathbb{Z} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ y $(x,x') * (y,y') = (x, x'+y')$.
Solución:
Consideramos la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ *dada por* $f(x,x') = (2x', 2x)$*. Esta función es un homomorfismo porque para todo* $(x,x'),(y,y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *se tiene que* $f((x,x') \triangle (y,y')) = f(x+y,x') = (2x', 2(x+y))$ *y* $f(x,x') * f(y,y') = (2x',2x) * (2y',2y) = (2x', 2x+2y) = (2x', 2(x+y))$*.*
Falta ver que f *es una biyección. Para esto, es suficiente mostrar que* $g : 2Z \times 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *dada por* $g(x,x') = (\frac{x'}{2}, \frac{x}{2})$ *cumple con* $f \circ g = id_{2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}}$ *y* $g \circ f = id_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$*. Notamos que* $(f \circ g)(x,x')) = f(\frac{x'}{2}, \frac{x}{2}) = (2\frac{x}{2}, 2\frac{x'}{2}) = (x,x')$ *para todo* $(x,x') \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$*, y* $(g \circ f)(x,x') = g(2x',2x) = (x,x')$ *para todo* $(x,x') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*, que es lo que se quería ver.*