

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 8

Se entrega P2 b) y P3 b).

P1.

a) Para $b \neq 0$ real fijo, calcular

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} b^k.$$

b) Demuestre que

$$\sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} \sum_{k=0}^n k^j = (n+1)^{j+1},$$

donde $n, j \in \mathbb{N}$.

c) Demuestre sin usar inducción que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j} = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

P2. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos.a) Demuestre que $|\bigcup_{i=1}^n A_i| \leq \sum_{i=1}^n |A_i|$.b) Demuestre que $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ si sólo si para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, se tiene $A_i \cap A_j = \emptyset$.**Solución:**

($\Leftarrow$) Procederemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. En clases hemos probado (ver proposición 7.5) que el resultado vale para $n = 2$. Supongamos que se verifica que para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}$, y como $A_i \cap A_j = \emptyset$ podemos asegurar que los conjuntos $\bigcup_{i=1}^n A_i$ y A_{n+1} son disjuntos. Usando nuevamente la proposición 7.5 obtenemos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}|.$$

Mediante la hipótesis de inducción se concluye que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|.$$

Por lo tanto el resultado vale para $n \in \mathbb{N}$.

($\Rightarrow$) Basta analizar el caso para dos conjuntos ya que se puede extender por inducción al caso de n conjuntos. Supongamos que A_1 y A_2 son dos conjuntos finitos que verifican $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. Recordemos que la proposición 7.7 del apunte nos asegura que para un par de conjuntos finitos se tiene $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Por nuestra hipótesis debe ocurrir que $|A_1 \cap A_2| = 0$. Esto nos dice que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, en virtud de la proposición 7.2 del apunte, verificando el resultado.

c) Demuestre que $\left| \left\{ \frac{2i+1}{2^n} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1}, n \in \{9, 10\} \right\} \right| = 2^8 + 2^9$.P3. a) Demuestre que $M := \{A \subset \mathbb{Q} \mid |A| = 2\}$ es numerable.b) Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Pruebe que si para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.**Solución:** Notemos que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\}).$$

Como los conjuntos $f^{-1}(\{n\})$ son numerables para cada $n \in \mathbb{N}$, y la unión numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable, podemos concluir que A es un conjunto numerable.