

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 7

Se entregan la P1 b, c, e y la P2 c.

P1. Determine si las siguientes relaciones son de orden, de equivalencia, o ninguno de los dos. En el caso que la relación sea de orden determine si es orden total, y si es relación de equivalencia, determine sus conjuntos cuociente:

a) En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se define $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff a \equiv_2 c \wedge b \equiv_3 d.$$

b) En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se define $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff a \leq c \wedge (a = c \Rightarrow b \leq d).$$

Es relación de orden porque:

- Es reflexiva: $\forall (a, b) \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a, b) \mathcal{R} (a, b)$ porque $a \leq a$ y $b \leq b$.

- Es antisimétrica: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}$ con $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ y $(c, d) \mathcal{R} (a, b)$ se tiene que $a \leq c \leq a$, lo que implica que $a = c$. Por lo tanto, también se tiene que $b \leq d \leq b$, lo que implica que $b = d$. Entonces $(a, b) = (c, d)$.

- Es transitiva: $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}$ con $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ y $(c, d) \mathcal{R} (e, f)$ se tiene que $a \leq c \leq e$. Por lo tanto $a \leq e$, y además, $a = e \Rightarrow a = c = e \Rightarrow b \leq d \wedge d \leq f \Rightarrow b \leq f$, así que $(a, b) \mathcal{R} (e, f)$.

Es orden total porque dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}$, o bien $a < c$ con lo que se tiene que $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$, o bien $c < a$, con lo que se tiene que $(c, d) \mathcal{R} (a, b)$, o bien $a = c$. En el último caso, si $b \leq d$ se tiene $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$, y si $d < b$ se tiene $(c, d) \mathcal{R} (a, b)$.

No es relación de equivalencia porque una relación solo puede ser simétrica y antisimétrica a la vez si la relación es la igualdad, lo que no es el caso con $\mathcal{R}$. (También vale poner un ejemplo de no-simetría.)

c) En $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, con $A \neq \emptyset$ un subconjunto fijo de $\mathbb{N}$, se define $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$X \mathcal{R} Y \iff A \setminus X = A \setminus Y.$$

Es relación de equivalencia porque:

- Es reflexiva porque para cada $X \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que $A \setminus X = A \setminus X$.

- Es simétrica porque para cada $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, si $A \setminus X = A \setminus Y$ entonces también $A \setminus Y = A \setminus X$.

- Es transitiva porque para cada $X, Y, Z \subseteq \mathbb{N}$, si $A \setminus X = A \setminus Y$ y $A \setminus Y = A \setminus Z$, entonces también $A \setminus X = A \setminus Z$.

El conjunto cuociente bajo esta relación es el siguiente: $\{\{B \subseteq \mathbb{N} : A \setminus B = A \setminus C\} : C \in \mathcal{P}(A)\} = \{\{B \subseteq \mathbb{N} : A \cap B = A \cap C\} : C \in \mathcal{P}(A)\}$ (basta nombrar uno de los dos). Esto porque para cada conjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ existe un subconjunto C de A tal que $A \setminus B = A \setminus C$. En particular, este conjunto C es $C = A \cap B$ y tenemos $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \setminus C$.

No es relación de orden porque una relación solo puede ser simétrica y antisimétrica a la vez si la relación es la igualdad, lo que no es el caso con $\mathcal{R}$. (También vale poner un ejemplo de no-antisimetría.)

d) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, se define $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(X_1, X_2) \mathcal{R} (Y_1, Y_2) \iff (X_1 \subseteq Y_1 \wedge Y_2 \subseteq X_2).$$

e) En un conjunto X con una partición $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ de X , tal que $k \geq 2$ y P_1 tenga al menos dos elementos, se define $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$x \mathcal{R} y \iff \exists i, j \in \{1, \dots, k\}, x \in P_i \wedge y \in P_j \wedge i \leq j.$$

No es simétrica porque para $x \in P_1, y \in P_2$ se tiene $x \mathcal{R} y$ pero no se tiene $y \mathcal{R} x$. Por lo tanto no es relación de equivalencia.

No es antisimétrica porque existen $x, x' \in P_1$ con $x \neq x'$ pero se tiene $x \mathcal{R} x'$ y $x' \mathcal{R} x$. Por lo tanto no es relación de orden.

f) En un conjunto X con una partición P de X , se define $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$x \mathcal{R} y \iff \exists A \in P \text{ tal que } x, y \in A.$$

P2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$$

$$b) \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

Indicación: Puede serle útil separar la suma en términos pares ($k = 2i$) y en impares ($k = 2i - 1$), con $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$c) \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{n - nk}{k^2 + k} \cdot (k + 1)!$$

Calculemos, usando factorización de constantes, propiedades del factorial y la propiedad telescópica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{n - nk}{k^2 + k} \cdot (k + 1)! &= \frac{1}{n} \cdot n \sum_{k=1}^n \frac{1 - k}{k(k + 1)} \cdot (k + 1)! = \sum_{k=1}^n (1 - k) \frac{(k + 1)!}{k(k + 1)} = \sum_{k=1}^n (1 - k) \cdot (k - 1)! \\ &= \sum_{k=1}^n ((k - 1)! - k \cdot (k - 1)!) = \sum_{k=1}^n ((k - 1)! - k!) = 0! - n! = 1 - n! \end{aligned}$$

(Es posible hacerlo sin la propiedad telescópica, haciendo separación de sumatorias, cambio de índice.)

Para los próximos dos items, sea $r \in \mathbb{R}, r \neq 1$. Se define $S_n = \sum_{k=1}^n k r^k$.

$$d) \text{ Demuestre que } S_n = r(S_n - n r^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}.$$

Indicación: Puede serle útil usar cambio de índice en S_n .

$$e) \text{ Demuestre que } S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}.$$