

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 6

Se entrega P3 y P4.

P1. Sea $f : A \longrightarrow B$ un función. Un conjunto $D \subseteq A$ se dice estable para f si $f^{-1}(f(D)) = D$.

- Demuestre que si A_1 y A_2 son conjuntos estables para f , entonces $A_1 \cup A_2$ también lo es.
- Demuestre que para todo $D \subseteq A$, el conjunto $E := f^{-1}(f(D))$ es estable para f .

P2. Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ función}\}$ y $\mathcal{R}$ una relación de orden sobre $\mathbb{Z}$. Demuestre que la relación $\tilde{\mathcal{R}}$ definida por

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f \tilde{\mathcal{R}} g \iff \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \mathcal{R} g(x),$$

es una relación de orden sobre $\mathcal{F}$.

P3. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y consideremos $D_1, D_2 \subseteq f(A)$.

- Pruebe que si $D_1 \cup D_2 = f(A)$, entonces $f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = A$.

Solución: Notemos que $f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) \subseteq A$, ya que $D_1, D_2 \subseteq f(A)$. En efecto, la afirmación se basa en que $f^{-1}(D_1) \subseteq A$ y $f^{-1}(D_2) \subseteq A$. Verifiquemos esta afirmación para $D_1 \subseteq f(A)$. Sea $x \in f^{-1}(D_1)$, luego $f(x) \in D_1 \subseteq f(A)$. Esto asegura que $x \in A$. De manera análoga se verifica para $D_2 \subseteq f(A)$. Por lo que nos queda verificar que $A \subseteq f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$ para probar la igualdad de conjuntos solicitada. Recordemos que la preimagen verifica $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$.

Luego $f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = f^{-1}(f(A))$, ya que $D_1 \cup D_2 = f(A)$. Ahora, usando que siempre tenemos que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ obtenemos que $A \subseteq f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$. Por lo tanto $f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = A$.

- Pruebe que si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, entonces $f(f^{-1}(D_1)) \cap f(f^{-1}(D_2)) = \emptyset$.

Solución: Recordemos que para todo $D_1 \subseteq f(A)$ se sigue que $f(f^{-1}(D_1)) = D_1$. De esta forma también vale para $D_2 \subseteq f(A)$, por lo tanto tenemos $f(f^{-1}(D_1)) \cap f(f^{-1}(D_2)) = D_1 \cap D_2$. Así, usando la hipótesis obtenemos $f(f^{-1}(D_1)) \cap f(f^{-1}(D_2)) = \emptyset$.

P4. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $b \geq 1$. Definimos sobre $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por $x \mathcal{R} y \iff b \mid ax + y$ (b divide a $ax + y$).

- Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b \mid (a + 1)$.

Solución:

($\implies$) Supongamos que $\mathcal{R}$ es refleja, esto es, para todo $x \in \mathbb{Z}$ tenemos $x \mathcal{R} x$. En este caso se sigue que $b \mid ax + x$ o equivalentemente $b \mid (a + 1)x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Luego b divide a $a + 1$, ya que podemos tomar $x = 1 \in \mathbb{Z}$.

($\impliedby$) Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 1 = bk$. Multiplicando esta última igualdad por $x \in \mathbb{Z}$ obtenemos $ax + x = b(kx)$. Como $kx \in \mathbb{Z}$, concluimos que $b \mid ax + x$ y por tanto $\mathcal{R}$ es refleja.

- Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b \mid (a^2 - 1)$.

Solución:

Supongamos que $\mathcal{R}$ es simétrica, es decir, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ si $x \mathcal{R} y$ se sigue que $y \mathcal{R} x$. Lo anterior es equivalente a si $b \mid ax + y$ entonces $b \mid ay + x$. Así, si existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + y = bk_1$ entonces existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ que verifica $ay + x = bk_2$. Combinando estas dos últimas igualdades podemos escribir $a(bk_1 - ax) + x = bk_2$, y agrupando términos obtenemos $(a^2 - 1)x = b(ak_1 - k_2)$ donde $ak_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Esto nos asegura que $b \mid (a^2 - 1)$, ya que x es arbitrario.